Revue française de pédagogie
Recherches en éducation

214 | 2022
Varia

Rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Synthèse et perspectives en didactique des mathématiques

The role of verbal language in the learning and teaching of mathematics. Synthesis and perspectives in mathematics didactics

Aurélie Chesnais et Lalina Coulange

OpenEdition Journals

Édition électronique
URL : https://journals.openedition.org/rfp/11357
DOI : 10.4000/rfp.11357
ISSN : 2105-2913

Éditeur
ENS Éditions

Édition imprimée
Date de publication : 1 juillet 2022
Pagination : 85-121
ISBN : 979-10-362-0592-7
ISSN : 0556-7807

Référence électronique
Aurélie Chesnais et Lalina Coulange, « Rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Synthèse et perspectives en didactique des mathématiques », *Revue française de pédagogie* [En ligne], 214 | 2022, mis en ligne le 01 janvier 2026, consulté le 07 janvier 2026. URL : http://journals.openedition.org/rfp/11357 ; DOI : https://doi.org/10.4000/rfp.11357

Le texte seul est utilisable sous licence CC BY-NC-ND 4.0. Les autres éléments (illustrations, fichiers annexes importés) sont susceptibles d'être soumis à des autorisations d'usage spécifiques.

Rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Synthèse et perspectives en didactique des mathématiques

Aurélie Chesnais
Lalina Coulange

Cette note de synthèse porte sur la question du rôle et de la place du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Nous proposons une synthèse des apports, sur cette question, de travaux menés en didactique des mathématiques de tradition française avant de dégager des perspectives. Nous présentons tout d'abord une relecture de travaux fondateurs des piliers théoriques du champ orientée par cette question. Dans un deuxième temps, nous rendons compte de travaux plus récents s'intéressant au langage verbal et qui contribuent au développement de ces approches théoriques en didactique des mathématiques. Enfin, nous proposons une problématisation de la question du rôle et de la place du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, issue d'un point de vue orienté par un ancrage théorique vygotskien qui nous paraît aujourd'hui particulièrement propice à cette problématisation.

Mots-clés (TESE) : didactique, mathématiques, théorie d'apprentissage

La question du rôle et de la place du langage dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques connaît un (re-)gain d'intérêt, dans la dernière décennie, dans la recherche en didactique des mathématiques de tradition française, comme l'attestent la thématique de l'école d'été de recherche en didactique des mathématiques de 2011 « Le langage dans les théories et recherches en didactique des mathématiques » (Bronner, Bulf, Castela *et al.*, 2013) ou le numéro spécial « Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques » de la revue *Spirale* en 2014 (Barrier & Mathé, 2014).

Nous proposons dans cet article une synthèse des recherches conduites en didactique des mathématiques, en nous centrant sur la question spécifique du rôle du « langage verbal », c'est-à-dire sur la part de l'activité langagière, orale ou écrite, qui s'appuie sur les usages d'une « langue naturelle » (essentiellement la langue française dans les travaux de didactique des mathématiques français) (Bronckart, 2007). D'une part, nous rejoignons en cela la distinction faite par Rebière (2013) – en cohérence avec la caractérisation du langage verbal faite par Bronckart (2007) – entre la langue, qui constitue le matériau, réservoir et code, intériorisée par chacun mais partagée dans une communauté, et le langage comme étant la mise en activité, par un sujet singulier et en contexte, de la langue[1]. D'autre part, si nous ne nions pas que d'autres matériaux (liés à d'autres signes : symboles, graphiques, etc.) interviennent de manière importante en mathématiques, nous faisons le choix de nous intéresser à ce qui relève d'usages de cette langue naturelle, commune à différentes sphères d'activités des sujets, en considérant que cette activité langagière recouvre, par là même, d'autres fonctions que celles strictement liées à l'activité mathématique du sujet.

Notre premier objectif est de faire la synthèse des apports, sur la question du rôle et de la place du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, de travaux menés en didactique des mathématiques de tradition française. Nous proposons ainsi dans une première partie une relecture, orientée par cette question, des textes fondateurs des différents cadres et approches théoriques qui structurent le champ, même s'ils ne l'abordent pas toujours en tant que telle. Nous nous sommes ainsi tout d'abord attachées à identifier ce qui fait consensus, les points de divergence et les chantiers ouverts dans les trois « piliers théoriques » initiaux de la didactique des mathématiques (Artigue, Bosch, Chaachoua *et al.*, 2019)[2], auxquels nous avons adjoint la Théorie des registres de représentation sémiotique (RRS) de Duval[3]. La deuxième partie est consacrée à dégager les orientations de travaux plus récents et qui tendent à renouveler et enrichir le point de vue sur la question du langage verbal dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, tout en contribuant au développement de ces théories et plus globalement du paysage théorique du champ.

Notre deuxième objectif, non indépendant du premier, est de dégager des perspectives de recherche sur cette problématique, que nous considérons comme essentielle pour le champ de la didactique des mathématiques (initialement francophone), au regard des connaissances qu'elle a déjà produit par elle-même ou qu'elle peut continuer à produire à ce sujet. Nous proposons ainsi, dans une troisième partie, une problématisation de la question du rôle et de la place du langage verbal en didactique des mathématiques, issue d'un point de vue orienté

---

1 Notons que certains auteurs (notamment parmi ceux qui seront cités dans cet article) ne font pas la distinction entre la langue naturelle et l'activité langagière prenant appui sur la langue naturelle ou les usages de cette langue. Ainsi, quand certains didacticiens parlent de la langue naturelle ou de langage naturel, ils intègrent souvent les questions que nous considérons comme relevant du « langage verbal » au sens de Bronckart (2007).

2 Artigue, Bosch, Chaachoua *et al.* présentent la Théorie des situations didactiques (TSD), la Théorie anthropologique du didactique (TAD) et la Théorie des champs conceptuels (TCC) comme des théories participant de la tradition de didactique des mathématiques française dans une conférence faite à l'occasion d'une *International Conference on Mathematics Education* (à Hambourg en 2016).

3 Théorie qui a joué un rôle important dans les préoccupations liées à la sémiotique et au langage dans le champ de la didactique des mathématiques, mais qui n'est pas mise en avant par Artigue et al. (2018) car elle n'a pas joué de fait le même rôle que les autres dans la genèse historique de ce champ.

par un ancrage théorique vygotskien qui nous paraît aujourd'hui particulièrement propice à cette problématisation. Les travaux précédemment évoqués seront resitués au regard de cette proposition.

La relecture et le repositionnement de travaux avec ce double enjeu sont orientés par le point de vue que nous avons choisi. En particulier, isoler la question du langage verbal est un choix assumé, qui pourrait être discuté, notamment du fait que d'autres entrées auraient pu être retenues, par exemple au regard de signes et d'usages de signes (symboliques, graphiques…) apparaissant *a priori* comme plus spécifiques des mathématiques. Ce choix peut se justifier d'une part du fait que ce sont bien des questions pour partie spécifiques du langage verbal qui nous semblent avoir émergé dans le champ de la didactique des mathématiques durant la dernière décennie ; d'autre part, ces questions sont à même de résonner fortement avec des problématiques plus largement partagées au sein des recherches en éducation, sur le rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage.

Le fait d'adopter un point de vue lié aux recherches développées dans le cadre de la tradition française de recherche en didactique des mathématiques est également une prise de position que nous assumons en tant que chercheuses du domaine. Notre visée est en effet que les perspectives dégagées contribuent à nourrir de nouveaux développements liés à la thématique du langage verbal envisagée dans ce domaine en particulier. Nous proposons toutefois dans la discussion de situer ces perspectives au regard des avancées d'un ensemble plus large de recherches conduites dans le domaine de la *mathematics education*, même si la question du langage verbal s'y positionne de façon tout autre et notamment très antérieurement[4].

La question du langage (verbal) dans les théories fondatrices de didactique des mathématiques

Deux théories fondatrices de la didactique des mathématiques, la théorie des situations didactiques (TSD, Brousseau, 1986, 1998[5]) et la théorie de la transposition didactique (Chevallard, 1985) et ses prolongements dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD, Chevallard, 1992, 1999) n'isolent pas initialement la question du rôle joué par le langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques ou dans l'étude de phénomènes afférents. Cela ne signifie pas que le langage verbal ne joue aucun rôle dans certains des développements de ces théories ou dans les mises en œuvre associées – c'est donc une relecture presque « en creux », orientée par la recherche de fonctions qui ont été prêtées de manière implicite ou pourraient être prêtées au langage verbal dans ces théories, que nous faisons ci-après. Il n'en sera pas de même pour les deux autres approches théoriques citées dans cette partie, la théorie des registres de représentations sémiotiques (RRS, Duval, 1993, 1995) ou la théorie des champs conceptuels (TCC, Vergnaud, 1990), qui quant à elles prennent explicitement position sur des questions spécifiquement liées au langage verbal.

4 La première revue de travaux en langue anglaise sur la question du langage verbal en *mathematics education* date de 1979. Elle incluait 13 pages de références bibliographiques dont une seule concernait un chercheur français, François Colmez.

5 Ouvrage rassemblant un ensemble de textes de Guy Brousseau, publiés de 1970 à 1990. L'article de 1986, intitulé « Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques » publié dans la revue *Recherches en didactique des mathématiques* fait partie de cet ouvrage.

Formulation et antagonisme du milieu dans la théorie des situations didactiques

Si, dans le cadre de la TSD, telle que développée par Brousseau (1998), il n'y a pas de développement théorique centré sur le rôle du langage verbal dans la construction de savoirs mathématiques, il est parfois fait mention de la « langue naturelle » et de son (re)travail *via* la « formulation » de connaissances. Brousseau (1998, p. 98) évoque ainsi un « recours constant à la langue naturelle et à toutes sortes de représentations tels les dessins ou les graphes » dans l'activité mathématique, ce qui exige de distinguer « pour eux des codes et des modes de contrôle propres » (Brousseau, 1998, p. 98). Tel serait un des rôles de la formulation mise en avant dans la TSD. Celle-ci renvoie à l'identification ou à la construction de « codes langagiers » spécifiques (dont verbaux), de modes d'action (nécessitant de recourir à ces codes) et de contrôle qui leur sont propres, dont il s'agirait de faire éprouver le caractère nécessaire aux élèves dans leurs apprentissages. Cette nécessité repose d'une part sur l'hypothèse d'ambiguïtés possibles dans la communication non réglée par ce type de codes, ambiguïtés qu'il s'agirait précisément de réduire[6]. Elle repose d'autre part sur le fait que les connaissances mathématiques peuvent demeurer des modèles implicites d'action dans une situation didactique. Dès lors, en l'absence de formulation et même d'institutionnalisation, de telles connaissances sur lesquelles ont pu reposer des actions d'élèves semblent destinées à être perdues. La formulation repose, dans le cadre de la TSD, sur l'organisation de « situations de communication » entre apprenants (avec des positions d'émetteurs-récepteurs), modélisées par des situations adidactiques[7] (ou tout au moins des phases adidactiques dans les situations). Ces situations apparaissent en complément de situations d'action lorsque celles-ci n'impliquent pas d'elles-mêmes suffisamment de nécessités liées à la formulation (Bosch & Perrin-Glorian, 2013). Un exemple prototypique de situation de communication est celui des « figures téléphonées » dans laquelle il s'agit pour un élève (ou un groupe d'élèves) de formuler (oralement ou par écrit) un message décrivant une figure géométrique de telle façon qu'il permette à d'autres élèves de reproduire la figure sans l'avoir vue. Ces situations doivent permettre l'émergence d'un langage commun pour les élèves, sans ambiguïté et spécifique, contribuant ainsi à la création d'un « modèle mathématique explicite ». L'institutionnalisation, avec l'introduction éventuellement par l'enseignant des « conventions universelles » (par exemple, du lexique usuel), prolonge le travail en visant l'acquisition des formes langagières culturellement reconnues. Si on pense ainsi d'emblée à la formulation et aux visées en termes d'apprentissage des mathématiques que cette dialectique recouvre, il serait toutefois sans doute réducteur de considérer que le rôle, certes demeuré implicite, du langage verbal se limiterait à cela dans le cadre de la TSD.

On peut ainsi considérer que le modèle de situation adidactique (dans ses autres composantes d'action et de validation) est à même de faire « la part belle » au langage verbal et à d'autres de ses fonctions que celles liées à la formulation de connaissances. En effet, le milieu étant défini comme système dénué d'intentions didactiques et présentant, de ce fait, une certaine matérialité, l'étude de certaines situations adidactiques fait également apparaître un autre recours possible au langage naturel comme contextualisé à cette matérialité. Par

6 Ajoutons que Brousseau (2004) pointe ces ambiguïtés en les mettant en lien avec des pratiques d'ostension visant à désigner une classe d'objets à partir d'un de ses « représentants ».

7 « La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées, par un choix judicieux, des "problèmes" qu'il lui propose. Ces problèmes, choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter, doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître. […] Une telle situation est appelée situation *a-didactique* » (Brousseau, 1986, p. 49).

exemple, dans l'œuvre majeure « Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire » (Brousseau & Brousseau, 1987 ; Brousseau, 1998), élèves et enseignants « parlent » de « l'épaisseur d'une feuille de papier » (qui sera plus tard codée par une écriture symbolique représentant une fraction) puis de « l'épaisseur d'un carton », correspondant à l'assemblage de feuilles de même épaisseur (modélisée par le produit d'un rationnel par un entier) : il s'agit précisément de ne pas dévoiler les connaissances mathématiques en jeu ou les savoirs visés en ne les nommant qu'en référence à une matérialité non spécifiquement mathématique. Ici, le langage verbal prendrait potentiellement une autre fonction, celle de décrire la matérialité du milieu visant à préserver le caractère antagoniste de ce système dénué d'intentions didactiques. Cette fonction potentielle du langage verbal dans le cadre de la TSD rejoint ce que Sensevy et Quilio appréhenderont plus tard dans l'analyse du discours de professeurs comme relevant d'une « réticence didactique » (Sensevy & Quilio, 2002 ; Sensevy, 2007), considérée comme une nécessité liée à la dévolution d'une situation. Cette réticence didactique ne serait pas « silencieuse » mais plutôt liée à un langage verbal qui prend la précaution de rester ancré sur la matérialité du milieu, de façon à ne pas en dévoyer la fonction antagoniste. Par ailleurs, une autre fonction du langage verbal, elle aussi non sans lien avec la matérialité du milieu des situations, serait davantage liée à la mémoire du système didactique (Brousseau & Centeno, 1991). Ainsi, certaines verbalisations retenues dans la gestion enseignante dans l'enchaînement de certaines situations semblent viser à permettre une référence constante à la matérialité du milieu : par exemple quand la verbalisation retenue pour l'écriture symbolique d'une fraction correspondant à l'épaisseur d'une feuille de papier est du type « deux pour quarante » millimètres (et non « deux quarantièmes » de millimètres)[8], cette verbalisation garantit d'une certaine façon la mémoire des actions d'élèves qui ont empilé quarante feuilles de papier pour obtenir un tas de deux millimètres d'épaisseur[9].

Ostensifs/non-ostensifs dans la théorie anthropologique du didactique

La théorie anthropologique du didactique (TAD), développée en continuité de celle de la transposition didactique par Chevallard et son équipe, ne fait pas plus du langage verbal un objet d'étude en soi que ne le fait la TSD. Toutefois, le langage verbal est à même d'être intégré au même titre que d'autres dimensions langagières de l'activité mathématique appréhendées dans ce cadre dans une acceptation très large par le biais des notions d'« ostensifs » et de « non ostensifs » (Chevallard, 1994 ; Bosch & Chevallard, 1999). Ces notions sont développées en étroite relation avec le modèle d'organisation praxéologique des savoirs, central dans la TAD. Les ostensifs correspondent à ce qui peut être perçu par les sens ou peut se donner à voir de la praxéologie mathématique (des écritures, des schémas, des gestes, etc.) quand les non-ostensifs (les concepts en jeu comme une fonction, une équation ou une figure géométrique[10], etc.) ne peuvent être qu'évoqués ou invoqués par le biais de ces ostensifs et de leurs manipulations ; d'où la nécessaire dialectique entre les uns et les autres dans la modélisation proposée de l'activité mathématique. Parmi les ostensifs, certains relèvent du langage verbal, comme

8 Il s'agit, dans les faits, de négocier, par le biais de cette nouvelle formulation, le passage de la désignation correspondant à un couple gardant la référence à l'action d'empiler les feuilles pour constituer des tas (mesure de l'épaisseur d'un tas exprimée en mm ; nombre de feuilles constituant le tas) à la désignation de l'épaisseur d'une feuille (provenant d'un tas donné) correspondant à une fraction.

9 Ce type de faits observables liés au rôle du langage verbal dans les situations didactiques est illustré par Fregona, Pilar Orus, Coulange *et al.* (à paraître) dans leur étude du « Fond Brousseau » (CRDM et banque de données vidéo – VISA) les amenant à revisiter des systèmes de ressources liées aux ingénieries menées au Centre d'observation et de recherches sur l'enseignement des mathématiques (COREM) et ayant servi de support au développement de la théorie des situations.

10 La « figure géométrique » renvoie ici à l'objet mathématique défini par un texte, qu'il ne faut pas réduire à sa représentation sous forme de dessin (Parzysz, 1988 ; Laborde & Capponi, 1994).

par exemple une succession d'étapes de calcul décrites par l'expression rhétorique d'un « programme de calcul » (comme « multiplier le nombre donné par quinze puis retrancher au nombre obtenu le triple du successeur du nombre donné ») (Chevallard & Bosch, 2012). Un des apports importants de ce développement théorique réside dans les deux « valences » des ostensifs, qui sont associées au sein d'une praxéologie donnée : la « valence instrumentale » (ou l'instrumentalité d'un ostensif) et la « valence sémiotique » (ou le fonctionnement de l'ostensif en tant que signe, son pouvoir d'évocation d'un non-ostensif). Cette « double valence » (Bosch & Chevallard, 1999) permet d'apprécier les propriétés des ostensifs dans l'activité mathématique : leurs *plus-values*, mais aussi leurs limites, à même d'éclairer les conditions de leur genèse dans des institutions qui visent à produire ou à diffuser des savoirs mathématiques. Par exemple, s'agissant des ostensifs verbaux associés aux « programmes de calcul » évoqués ci-avant, Chevallard (2007, repris dans Chevallard & Bosch, 2012) leur fait jouer un rôle très particulier dans la construction des savoirs algébriques, en montrant comment des limites liées à leur valence instrumentale peuvent donner une « raison d'être » à un nouveau système d'ostensifs, celui des écritures littérales ou symboliques permettant d'exprimer algébriquement un programme de calcul. Ainsi, en reprenant l'exemple particulier précédent, il s'agit de montrer comment sa formulation par une expression littérale (15x–3(x+1)) offre une plus grande valence instrumentale que la formulation en langage verbal, en permettant de répondre à de nouvelles questions et de « calculer sur » les programmes de calcul (Chevallard & Bosch, 2012) : c'est notamment le fait de développer et réduire l'expression 15x-3(x+1) en obtenant 12x-3 qui permet d'identifier que le programme de calcul précédent est *équivalent*[11] au programme « multiplier le nombre par 12 et soustraire 3 », ce qui serait très difficile (voire impossible) à identifier si l'on ne disposait que d'ostensifs verbaux. Ainsi tous les ostensifs participant à l'activité mathématique, en particulier ceux provenant du langage verbal pour ce qui nous intéresse dans cet article, peuvent-ils être étudiés à l'aune de leurs propriétés dans des pratiques liées aux savoirs mathématiques que modélisent les praxéologies mathématiques. Les ostensifs « verbaux » peuvent prendre une part importante dans la genèse de telles pratiques au sein d'institutions, du fait de leurs valences (instrumentales et sémiotiques) mais aussi de leur « productivité potentielle » à reconsidérer cette fois, du point de vue des sujets de ces institutions. Chevallard (1997) illustre ainsi la « productivité noétique » du langage verbal[12] par l'interrogation d'un élève dans une classe à propos de l'existence de l'expression « trapèze équilatéral », qui aurait pu constituer une occasion pour l'enseignant de (re)questionner les propriétés des triangles et quadrilatères, en lien avec les adjectifs retenus ou non pour les qualifier (isocèle, rectangle, équilatéral).

Si l'on considère spécifiquement les ostensifs relevant du langage verbal, l'exemple retenu précédemment des « programmes de calcul » (et de leurs modes d'expression liés à un langage verbal ou à un langage symbolique) donne d'ailleurs à voir un point commun avec certaines des visées liées à la dialectique de la formulation chez Brousseau : le projet de faire émerger ou de faire éprouver des nécessités liées à la construction de nouveaux codes, voire de nouveaux langages (formels ou symboliques), à partir des ambiguïtés ou des insuffisances liées à des premiers codes langagiers (notamment verbaux) sollicités dans l'activité mathématique. Ce point peut également s'avérer commun à une des fonctions attribuées à la langue naturelle par Duval (1995), déterminante pour les usages qui peuvent en être faits dans le langage verbal, du point de vue de la théorie des registres de représentation que nous évoquons maintenant.

11 Au sens où, pour le même nombre de départ, les deux programmes donnent le même nombre d'arrivée, quel que soit le nombre de départ choisi.

12 Chevallard faisant ainsi référence au potentiel d'une réflexion sur le langage verbal pour nourrir une pensée et une construction du réel.

La langue naturelle dans la théorie des registres de représentation sémiotique

Pour Duval, la langue naturelle peut être appréhendée comme un des multiples registres de représentation sémiotique, nécessairement convoqués dans l'activité cognitive liée aux mathématiques : « l'activité mathématique requiert qu'on utilise, développe et coordonne plusieurs systèmes de représentations sémiotiques, dont, aussi, la langue naturelle, même si elle ne sert pas à calculer » (Duval, 2014, p. 251). Par contraste avec les théories précédemment évoquées, Duval (1995) souligne toutefois les singularités de ce registre en le qualifiant de « registre à part » du fait d'une part de sa « priorité génétique sur les autres registres » et d'autre part de « sa fonction méta-discursive de communication ». Ces deux caractéristiques de la langue naturelle peuvent notamment conduire à une « spontanéité discursive qui sert de point d'ancrage à tout apprentissage lié à un enseignement, indépendamment du fait que cette spontanéité puisse ne pas respecter toutes les règles de conformité de la langue et qu'elle puisse être inhibée ou favorisée par le jeu des interactions sociales » (Duval, 1995, p. 82).

Dans notre relecture de l'œuvre de Duval, nous avons cherché à voir comment ces singularités pouvaient se donner à voir. Il nous semble que, selon les mises en lien considérées avec d'autres registres de représentation sémiotique, la langue naturelle joue différents rôles dans l'activité (cognitive) mathématique. Duval pointe ainsi l'impossibilité de traitements de type « calcul » comme une insuffisance du registre de la langue naturelle à même de rendre nécessaire un changement de registre, permettant un passage (*via* ce que Duval appelle des « conversions sémantiques ») au registre de représentation sémiotique *symbolique*, qui permet quant à lui de tels traitements. Le registre de représentation sémiotique symbolique est typique de différents domaines mathématiques, dont celui de l'algèbre déjà évoqué. Ceci rejoint d'une certaine façon le point de vue de Chevallard, exposé ci-avant : le système de signes que constitue ce registre ouvrant sur des potentialités liées au calcul, pointées par les deux auteurs comme rendu impossible dans le système de représentation sémiotique que constitue le langage verbal. Ainsi, la langue naturelle peut – et même doit, selon Duval – être considérée comme un registre de représentation à part entière, et jouer le rôle de registre de « départ » ou d'« arrivée » des conversions sémiotiques nécessaires à l'activité mathématique, au même titre que d'autres registres : par exemple, en convertissant un programme de calcul initialement énoncé dans le registre du langage verbal (registre de départ) en expression symbolique algébrique (registre d'arrivée), comme dans l'exemple précédent, ou l'inverse.

Mais dans le même temps, ce registre de représentations présente des spécificités du fait de l'hétérogénéité de ses emplois, communs ou spécialisés, dans différents domaines de connaissances, et de ce que Duval (2006) décrit comme des « changements de fonctions » – y compris au sein des mathématiques elles-mêmes. Ainsi, le registre de la langue naturelle joue, dans le type de mise en relations avec le registre de représentation symbolique, comme évoqué ci-dessus, un rôle peut-être moins singulier que lorsqu'il est mis en relation avec d'autres registres non discursifs, comme les registres visuels en géométrie. Dans ce cas, la langue naturelle revêt une autre fonction, celle d'un accompagnement permanent et nécessaire des traitements opérés au sein du registre visuel des figures géométriques, modélisé par le biais de co-variations entre les deux registres (celui visuel des figures et celui discursif de la langue naturelle). Ainsi, l'activité géométrique repose sur la mise en « synergie cognitive » entre un registre discursif et un registre de représentations visuelles (Duval, 2005, p. 48). Le registre discursif s'avère en particulier nécessaire pour soutenir la « décomposition dimensionnelle des formes » – elle-même indispensable au raisonnement géométrique – à partir d'une représentation visuelle : par exemple la capacité à voir un carré non pas seulement comme une surface (objet de dimension 2), mais comme étant composée de segments (objets de dimension 1), voire de points (objets de dimension 0).

Ainsi, le registre de la langue naturelle peut tantôt être considéré comme un registre « de départ » ou « d'arrivée », tantôt comme un registre « accompagnant », jouant alors à plein sa fonction (méta-)discursive dans l'activité (cognitive) mathématique, fonction somme toute peu prise en charge dans les théories précédemment évoquées. C'est précisément ce rôle « support » et même outil de l'apprentissage et de la conceptualisation qui est mis en avant dans la théorie des champs conceptuels développée par Vergnaud (1991). Cette dernière théorie diffère en cela de la théorie des situations, de la théorie anthropologique et de la théorie des registres de représentation sémiotique, sans nul doute du fait de son ancrage en psychologie cognitive et ses enrichissements des théories piagétiennes par un point de vue vygotskien sur l'apprentissage.

Langage verbal et conceptualisation dans la théorie des champs conceptuels

Vergnaud s'intéresse au « rôle du langage dans l'activité mathématique et dans la relation didactique » (Vergnaud, 1991, p. 83). S'il affirme que les mathématiques sont « une connaissance et non pas un langage » et qu'il s'agit de ne pas réduire les concepts et théorèmes qui constituent le contenu des mathématiques aux formes langagières (textuelles) que ceux-ci prennent, il accorde par ailleurs une importance particulière aux pratiques langagières (pas uniquement au langage verbal) spécifiques des mathématiques. Dans la théorie des champs conceptuels (TCC, Vergnaud, 1990), un concept est modélisé par un triplet correspondant aux situations donnant du sens au concept, aux invariants opératoires sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes associés au concept et, enfin, aux formes langagières qui permettent à la fois de représenter le concept, mais aussi ses propriétés, les situations et les procédures de traitement associées. Cela donne d'emblée une importance à ces « formes langagières » dans des activités liées aux concepts, qui ne sont pas seulement liées à leur représentation. Ce postulat est parfaitement assumé par Vergnaud dans son effort de développement théorique : « le langage et les symboles mathématiques jouent un rôle dans la conceptualisation et l'action. Sans les schèmes et les situations, ils seraient vides de sens » (1990, p. 168).

Cela le conduit en outre à distinguer la forme (langagière) prédicative de la connaissance qui permet d'énoncer des relations, de la forme opératoire de la connaissance qui permet d'agir en situation, tout en montrant leur caractère inséparable. Le langage verbal[13] occupe une place particulière dans les travaux de Vergnaud, comme « métalangage de tous les symbolismes », c'est-à-dire comme un accompagnement langagier nécessaire au fonctionnement du langage symbolique – ce qui constitue un point commun avec les travaux de Duval cités précédemment. Dans le même temps, Vergnaud (2001) met en avant que, du fait de son caractère à la fois « réducteur » et « foisonnant », le langage naturel peut introduire des imprécisions et des ambiguïtés – ce qui constitue un point commun avec certaines des remarques formulées par Brousseau. Vergnaud met en avant le fait que ces ambiguïtés sont levées dans la formalisation logique (représentable en langage formel) (Vergnaud, 2001 ; Durand-Guerrier, 2013). En étudiant le rôle du langage dans l'apprentissage, Vergnaud a ainsi montré le caractère producteur de certains symbolismes mais aussi la « complexité du *dire* » en mathématiques. Il met ainsi en évidence des « ruptures » dans les formes prédicatives des connaissances dont « l'accumulation [ajoutée à celle des ruptures conceptuelles dans les formes opératoires] engendre des difficultés pour les élèves ». Par exemple, il pointe un « saut » entre chacun des énoncés suivants liés à la symétrie orthogonale :

1. La forteresse est symétrique.
2. Le triangle A'B'C' est symétrique du triangle ABC par rapport à la droite (d).

13 Vergnaud parle plutôt de « langage naturel ».

3. La symétrie conserve les longueurs et les angles.
4. La symétrie est une isométrie (Vergnaud, 1991, p. 85, repris dans 2001, p. 6).

Le saut entre le premier et le deuxième énoncé est lié au changement de catégorie logique à laquelle chacun des énoncés fait référence, d'une propriété (« X est symétrique ») dans le premier cas à un prédicat à trois places dans le second (« X est symétrique de Y par rapport à Z ») et qui se traduisent dans le langage verbal par le même adjectif (« symétrique »), utilisé dans des formes syntaxiques différentes. Dans le troisième énoncé, « le prédicat "symétrique" est transformé en objet de pensée, doté à son tour de propriétés : celles de conserver les longueurs et de conserver les angles ». Vergnaud qualifie ce processus de « nominalisation », qu'il considère comme essentiel dans le développement conceptuel et caractérise ainsi : un prédicat (ou fonction propositionnelle) est « nominalisé » s'il devient objet et peut prendre une position d'argument dans un nouvel énoncé. Dans le quatrième et dernier énoncé, « la conservation des longueurs et des angles est devenue à son tour un objet, l'isométrie ». Ce même exemple fait également apparaître une ambiguïté dans l'usage de l'article défini « la », modélisé par deux formalisations logiques différentes d'un énoncé (le premier) à l'autre (le troisième). Dans le premier cas, l'usage du « la » est déictique et pointe un objet particulier (la forteresse) quand dans l'autre, il est « général » (indiquant une « quantification universelle » au sens logique du terme)[14]. Vergnaud considère que les fonctions du langage dans la relation didactique ne se limitent pas à la communication et à la représentation (elles-mêmes liées) mais recouvrent aussi une « aide à la pensée et à l'organisation de l'action » qui « s'appuie sur la fonction de représentation, mais ce qui est représenté alors, c'est à la fois les éléments de la situation pris en compte, l'action, et leurs relations » (1990, p. 168). Il met ainsi en avant, à propos de « la question typiquement vygotskienne de l'accompagnement de l'action et de la pensée par le langage », différents rôles possibles des activités langagières dans le fonctionnement de la pensée :

> […] rendre explicite ce qui n'était qu'implicite et lui donner ainsi un caractère public, qui permet de le soumettre au débat et à la preuve ; accompagner et aider la pensée dans son travail d'identification des propriétés, des relations et des objets, et dans son travail de programmation et de contrôle de l'action ; contribuer à la transformation du statut des connaissances, en favorisant notamment l'élaboration d'objets de niveau de plus en plus élevé (Vergnaud, 1991, p. 85).

En cela, au sein des théories fondatrices en didactique des mathématiques, la TCC constitue sans nul doute celle qui aura mis le plus explicitement en avant différentes fonctions du langage verbal, notamment celle d'accompagnement de l'apprentissage et de la conceptualisation – fonction finalement assez peu considérée dans la TSD et la TAD et assez peu distinguée d'autres fonctions en tant que telle, dans la théorie des registres de représentation sémiotiques. Toutefois, force est de constater que les voies d'étude ainsi suggérées par Vergnaud n'ont été que peu reprises, dans un premier temps, dans le champ de la didactique des mathématiques.

Une place à (re)donner au langage verbal en didactique des mathématiques ?

Mis à part ce qui semble donc être resté longtemps à l'état de projet dans les travaux de Vergnaud, cette question du langage verbal est ainsi plutôt restée « muette » ou implicite dans les développements des premières théorisations développées dans le cadre de la didactique des mathématiques de tradition française. À l'instar de ceux de Vergnaud, les travaux de Duval

14 En logique, la quantification universelle d'une proposition indique qu'elle est vraie pour tout élément d'un ensemble. Ainsi, l'expression « La symétrie [orthogonale] conserve les angles » indique que *toutes les* symétries orthogonales (quelle que soit la droite qui les caractérise) conservent les angles.

peuvent apparaître comme une forme d'exception. Toutefois, dans le cadre de la théorie des registres de représentation sémiotique, l'activité cognitive mathématique est précisément principalement considérée au prisme du fonctionnement de « différentes langues » (naturelle mais aussi symboliques ou graphique) – ce qui est loin de faire consensus dans la communauté française de recherche en didactique des mathématiques. Les choix faits dans les différentes théories ne sont sans doute pas sans lien avec les arrière-plans psychologiques et épistémologiques retenus sur les mathématiques, leur apprentissage et leur enseignement. Si, du point de vue de l'épistémologie des mathématiques, les didacticiens français s'accordent sur le fait de ne pas « réduire les mathématiques à une langue » ou « l'activité mathématique à une activité langagière », en revanche les modèles d'apprenants considérés sont divers. Dans la TSD, le sujet est épistémique, modélisé par ses connaissances mathématiques quand, dans la TAD, on considère un sujet institutionnel[15] modélisé par les rapports institutionnels et personnels à des objets de savoirs. Quoi qu'il en soit, les sujets considérés dans ces théories ne sont pas « sociologiquement situés », ce qui a pu contribuer à freiner un temps la problématisation explicite de questions liées au rôle du langage verbal dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Ces éléments contribuent peut-être à expliquer pourquoi la didactique française a mis du temps, plus que d'autres courants de recherche dans le paysage élargi de la *mathematics education*, à considérer le langage verbal comme un objet d'étude « en soi », quand d'autres théorisations, par exemple celle de Sfard (2000), mettaient davantage ces dimensions langagières (dont verbales) en avant ; nous y reviendrons dans la discussion.

Il y a toutefois quelques exceptions notables. On peut notamment citer la thèse de Laborde (1982) qui visait l'étude du rôle de deux codes, le « code symbolique » et le « code de la langue naturelle », imbriqués dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. S'agissant plus spécifiquement du langage verbal, dans le contexte de situations de communication en géométrie, telles que conçues dans le cadre de la théorie des situations (avec des émetteurs-récepteurs), Laborde prend notamment en considération des caractéristiques de la situation d'énonciation (Bronckart, 1977) qui ne sont pas initialement prises en charge dans le modèle de situation didactique. Vingt ans plus tard, deux thèses franco-italiennes, celle de Robotti (2002) et celle de Pedemonte (2002), qui ont pour point commun de viser des enrichissements des travaux de Duval, montrent également le rôle de pratiques langagières liées à la verbalisation (pour Robotti) et à l'argumentation (pour Pedemonte) comme des heuristiques nécessaires à la production de démonstrations par les élèves. En particulier, Robotti met en avant le rôle du langage verbal comme outil d'observation pour le chercheur en didactique des mathématiques en tant que révélateur de la démarche de résolution de l'élève.

Quoique restant « isolés » et peu repris sur le moment, ces différents travaux donnent à voir « en germe » des aspects inédits d'étude du langage verbal (dimension située de l'énonciation, formes intermédiaires de discours, fonction productive pour l'apprentissage de connaissances, données observables pour le chercheur…) ainsi que des prises d'appui sur des références en la matière parfois concomitantes (notamment les travaux de Vygotski, Bronckart…) qui vont s'avérer essentielles au cœur des développements ultérieurs sur le sujet dans le champ de la didactique des mathématiques… Mais bien plus tard !

15 Une institution est définie de manière très large par Chevallard (2003) comme un dispositif social qui impose et permet à ses « sujets » qui y occupent différentes positions, la mise en jeu de modes de faire et de penser propres à ces positions. Ce modèle permet théoriquement d'interpréter le rapport personnel à un savoir d'un individu comme résultant de la multiplicité des rapports institutionnels des institutions auxquelles il appartient, y compris en considérant des individus ou des collectifs d'individus (par exemple sa famille) comme institutions ; toutefois, dans les travaux conduits dans le cadre de cette approche, les institutions considérées sont principalement des institutions productrices ou participant à la diffusion de savoirs mathématiques.

Des enrichissements pour (re)penser la question du langage verbal dans les théories fondatrices

Assez récemment, des travaux dans le champ de la didactique des mathématiques ont cherché à prendre en charge, y compris collectivement, la question du langage verbal dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Des collectifs de didacticiens se sont constitués (comme le groupe LEMME[16]) et des productions collectives ont vu le jour comme en témoignent les actes de la 16e école d'été de recherche en didactique (intégrant un thème intitulé *Le langage dans les théories et recherches en didactique des mathématiques*) parus en 2013 (Bronner, Bulf, Castela *et al.*, 2013), ou le numéro spécial de la revue *Spirale* « Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques » publié en 2014 (Barrier & Mathé, 2014). Ces propositions nouvelles et enrichissements des théories fondatrices prennent en outre souvent appui sur d'autres champs de recherche (psychologie, didactique du français, socio-linguistique ou anthropologie…).

Par ailleurs, on peut penser que cet accroissement récent de l'intérêt pour les questions langagières n'est pas indépendant de l'évolution plus générale des travaux de didactique des mathématiques dans les dernières décennies, avec en particulier le développement de travaux s'intéressant davantage aux processus d'apprentissage et d'enseignement en contexte scolaire ordinaire[17].

(Re)penser le rôle du langage verbal dans la théorie des situations didactiques

Plusieurs travaux ont envisagé des approfondissements et des prolongements de la TSD dans ce sens. Perrin-Glorian (Bosch & Perrin-Glorian, 2013) revisite ainsi la formulation de connaissances, telle que développée par Brousseau et que nous avons évoquée dans la partie précédente. L'étude que Perrin-Glorian propose du rôle du langage (notamment verbal) dans la formulation est liée à la gestion qu'en fait l'enseignant dans des situations d'enseignement et d'apprentissage « ordinaires » et dépasse le seul cadre des phases ou des situations de formulation conçues dans le cadre d'ingénieries didactiques (Bosch & Perrin-Glorian, 2013). Perrin-Glorian propose à cet effet une grille d'analyse en plusieurs points spécifiquement reliés à des outils de la TSD (comme la distinction connaissances et savoirs, dévolution et institutionnalisation, milieu, contrat didactique) qui regroupent et structurent des questions possibles à se poser sur la manière dont l'enseignant s'appuie sur le langage – notamment le langage verbal – pour permettre des apprentissages des élèves. Par exemple, s'agissant de la « régulation des rapports des élèves avec le milieu et de la négociation du contrat didactique dans une phase de recherche des élèves si elle existe », Perrin-Glorian indique que, la régulation se faisant essentiellement par le langage, il s'agit d'examiner en quoi et comment ces interactions participent de modifications apportées au milieu et à la situation, de connaissances convoquées ou d'ostensifs utilisés par les élèves, ou encore d'apports de l'enseignant dans la mise en évidence de certains éléments du milieu, d'injection de vocabulaire, d'ostensifs, d'activation de connaissances ou d'éléments liés à une mémoire de situations déjà rencontrées (Bosch & Perrin-Glorian, 2013, p. 282).

Par ailleurs, Mathé (Mathé, Barrier & Perrin-Glorian, 2020 ; Mathé & Mithalal, 2019 ; Bulf & Mathé, 2018) a prolongé cette réflexion sur la question de la formulation en lien avec la

16 Le collectif Langage dans l'Enseignement et l'apprentissage des MathéMatiquEs, créé en 2013. On peut prendre connaissance de ses activités à l'adresse : <https://www.ldar.website/lemme> (consulté le 2 juin 2022).

17 Nous entendons par « contexte ordinaire » le fait que le chercheur n'intervient pas, ni dans la conception ni dans la mise en œuvre du processus d'apprentissage et d'enseignement – par opposition aux recherches précédentes faisant une large part aux ingénieries didactiques.

régulation des rapports des élèves avec le milieu, mais en renouant avec une perspective d'ingénierie didactique : en (re)pensant la conception et la mise en œuvre de situations de communication, porteuses d'un caractère de nécessité liée à la formulation – essentiellement verbale – de connaissances géométriques. Dans la même lignée, en s'intéressant au rôle du langage dans une situation d'enseignement et d'apprentissage ordinaire de la géométrie au collège, Bulf, Mathé et Mithalal (Bulf, Mathé, Mithalal *et al.*, 2013 ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2015) re-questionnent le fait qu'au sein de la TSD « les interactions langagières – verbales notamment – sont essentiellement envisagées comme des externalités ou des moyens de mise à distance, au sein des processus de dévolution et d'institutionnalisation » (Bulf, Mathé & Mithalal, 2015, p. 12). Ces travaux prennent appui sur un premier développement lié à une approche wittgensteinienne de l'apprentissage, déjà amorcé par Mathé (2012, en appui sur Wittgenstein, 1953) et sur différents travaux anglo-saxons pionniers en la matière, mais en se référant surtout et d'emblée aux travaux français de Bernié, Jaubert et Rebière (Bernié, 2002 ; Jaubert, 2007 ; Jaubert, Rebière & Bernié, 2012 ; Rebière, 2013) pour (re)penser le rôle du langage « comme *outil de construction, de négociation et de transformation des significations* » (Bulf, Mathé & Mithalal, 2015). Cela conduit ces auteurs à faire un pas de côté par rapport à l'aspect social de l'apprentissage initialement considéré dans le cadre de la TSD. Considérant ainsi l'apprentissage des mathématiques comme une entrée dans une communauté discursive au sens de Bernié (2002), c'est-à-dire une « entrée dans une culture, et la participation à des pratiques socialement construites et partagées », ces auteurs repositionnent le langage « au centre de l'activité du sujet et de la médiation de pratiques culturelles dans lesquelles il s'agit d'entrer » (Bulf, Mathé & Mithalal, 2015, p. 12). Dans les analyses proposées, ils mettent ainsi en lumière des activités langagières des élèves et du professeur, contribuant à orienter les interactions des élèves avec le milieu de la situation, de deux principaux points de vue. Par exemple, certaines interventions du professeur participent de la dynamique constitutive de cheminements d'élèves au sein de la situation didactique (modélisés par des positions au sein de la situation) : ces interventions peuvent inciter les élèves à « passer à l'action » (à travers la formulation de verbes d'action, à l'infinitif ou au présent, ou autres expressions) ou bien les « faire basculer » en position d'apprenant, quand le professeur emploie un « langage de validation » (avec des appréciations du type « bon », « très bien », etc.). D'autres interventions de l'enseignant participent de la constitution ou de la négociation des contenus du milieu de la situation, par exemple en attirant l'attention des élèves sur l'utilité potentielle d'une connaissance ancienne (dans leur exemple, le tracé du symétrique d'un point), qui d'emblée exclut un ensemble de procédures possibles (assez nombreuses en l'occurrence, s'agissant de tracés de de figures symétriques) qui ne convoqueraient pas spécifiquement cette connaissance mathématique. On peut dès lors considérer que, par là même, toutes ces interventions du professeur participent de la négociation de nouvelles significations en lien avec les connaissances mathématiques visées sur la symétrie centrale, ou, pour le dire autrement, de l'institution d'une communauté discursive géométrique scolaire. Toutefois, les auteurs de l'article ne s'attardent pas sur la mise en lien ainsi faite entre leurs outils d'analyse didactique et ces notions centrées sur le rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage, ces dernières leur ayant essentiellement servi à faire émerger une nouvelle direction de travail ancrée dans la théorie des situations.

On note toutefois que, dans ces travaux, les outils d'analyse restent à ce stade ceux de la TSD, l'enrichissement proposé avec l'apport théorique de la notion de communauté discursive concerne davantage la convocation d'un nouvel arrière-plan théorique pour piloter de nouveaux usages de ces outils, amenant par exemple à intégrer les consignes formulées verbalement par l'enseignant dans le milieu et en s'intéressant à leur rôle dans l'orientation des interactions des élèves avec celui-ci.

Parallèlement, Gobert (2013, 2014), suite à des travaux menés dans le cadre de la TSD, se penche sur l'usage de nouveaux outils d'analyse issus de l'approche théorique déjà citée,

développée par Bernié, Jaubert et Rebière (Bernié, 2002 ; Jaubert, 2007 ; Jaubert, Rebière & Bernié, 2012 ; Rebière, 2013) pour (re)penser le rôle du langage verbal dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Elle est la première à emprunter explicitement la notion de « secondarisation des genres de discours », développée en appui sur la distinction entre des « genres premiers » (spontanés, familiers…) et des « genres seconds » (réflexifs ou visant à mettre à distance, élaborés…) de discours faite par Bakhtine/Volochinov[18] (1984), articulée avec un arrière-plan principalement vygotskien. À l'instar de Jaubert (2007), Gobert (2014) insiste d'ailleurs sur le fait qu'il ne s'agit pas tant de s'intéresser à la production d'un genre premier ou d'un genre second par l'élève, mais plutôt de s'intéresser à l'évolution du rapport au langage de l'élève. Ainsi la notion de secondarisation vise à interroger des transformations des discours, à même de témoigner de déplacements à la fois cognitifs et énonciatifs de l'élève. Cette notion s'articule avec d'autres outils comme celui de « contexte interprétatif » (d'une tâche scolaire que les enseignants et les élèves co-construisent dans et par le langage) (Brossard, 1992) et la notion de « schématisation » visant à faire apparaître des traits saillants dans le discours (Grize, 1990), mais Gobert ne fait pas (ou plus) référence explicitement aux concepts de la TSD. Pour autant, certains des exemples envisagés paraissent précisément permettre de réinterroger ce qui pourrait se jouer en termes de secondarisation des discours, dans des interactions qui semblent avoir, du point de vue de la TSD, une fonction relevant principalement de la dévolution d'une situation. Ainsi, Gobert (2013, 2014) repère, dans les interventions langagières du professeur et des élèves, des objets constituant autant de contextes interprétatifs, associés à une tâche scolaire qui vise la construction de connaissances sur la numération décimale[19] au moment de la présentation de cette tâche. Ces contextes interprétatifs, et les schématisations qui prennent davantage la forme d'écritures symboliques mais dont les significations sont négociées ou négociables *via* les échanges verbaux, participent de la dynamique de secondarisation de genres de discours étudiée par Gobert (2013, 2014) éclairant ainsi, selon nous, le rôle joué par le langage verbal dans le processus de dévolution.

Les travaux de Coulange (2014, 2015), eux-mêmes appuyés sur les recherches de Gobert, examinent des conditions liées à l'institutionnalisation de savoirs mathématiques dans la classe, relativement à la secondarisation des pratiques langagières (Coulange, 2014). Ils apparaissent parmi les premiers à articuler explicitement la notion d'institutionnalisation issue de la TSD et la notion de secondarisation, issue de l'approche précitée. C'est un « premier pas » en la matière, car centré sur le processus d'institutionnalisation, recouvrant une dimension langagière « quasi évidente » du fait même de sa fonction liée à l'explicitation par l'enseignant de formes culturellement reconnues du savoir mathématique (dont les formes verbales) et à l'appropriation par les élèves de ce savoir, en décontextualisant et dépersonnalisant les connaissances mises en fonctionnement dans leur(s) activité(s).

Cette première étape de développement des recherches sur le langage dans le cadre de la TSD, avec une démarche restée donc dans un premier temps assez « prudente » en matière d'articulation d'outillages théoriques de la théorie des situations avec d'autres – dédiés à l'étude de pratiques langagières – semble avoir été dépassée depuis. Ainsi, les auteurs déjà cités, Bulf, Mathé et Mithalal (2015), remettant précisément en question le fait de cantonner le rôle du langage à la dévolution et à l'institutionnalisation en théorie des situations didactiques, conçoivent un outil, les « modes de fréquentation des objets de savoirs », qui vise à penser différents modes d'*agir-parler-penser*[20] spécifiques de ces savoirs (Jaubert, Rebière & Bernié, 2012 ; Rebière, 2013), permettant l'analyse *a priori* et *a posteriori* de situations

18 À l'instar d'autres auteurs, nous faisons le choix d'accoler les deux noms, suite aux travaux menés par Bronckart et Bota (2011) concernant la paternité des textes attribués à Bakhtine.

19 Ici, le groupement par dix en lien pour construire la notion de dizaine.

20 Reprenant ici une expression de Jaubert et Rebière.

didactiques en intégrant la notion de secondarisation des pratiques langagières. Ces modes de fréquentation permettent d'identifier dans le discours d'élèves et d'enseignants ce qui caractériserait des dénivellations des genres de discours afférents.

D'autres voies (que celle liée à la secondarisation des pratiques langagières) ont également été suivies pour penser des enrichissements d'outillages de la TSD à même de (re)penser le rôle du langage (notamment verbal) dans cette théorie. Ainsi, à partir des travaux de Goody en anthropologie (1979), Laparra et Margolinas redéfinissent notamment la notion de milieu d'une situation didactique, comme constitué « d'objets du monde », un objet du monde étant défini comme étant « le plus souvent matériel, présent à l'école et hors l'école et qui de ce fait, évoque pour l'élève les affects et les usages qu'il connaît déjà » (2016, p. 169). Un cap nous semble franchi avec les enrichissements proposés dans ces travaux, qui intègrent ainsi dans la notion de milieu, particulièrement centrale dans le cadre de la TSD, quelque chose qui relève de pratiques sociales – notamment langagières – antérieures des élèves. Ainsi, par exemple, dans Margolinas et Laparra (2011), les chercheuses montrent que des savoirs relevant d'un écrit spécifique, la recette de cuisine (qui comprend deux listes, l'une énumérant les ingrédients, l'autre ordonnant une série d'instructions), restent « transparents »[21] du point de vue d'une enseignante de grande section de maternelle, et ce, en partie à cause de l'absence de verbalisation de la recette par les élèves qui n'investissent pas la situation de manière conforme à ses attentes. Ceci conduit à considérer un point de vue « socialement situé » sur l'investissement des situations didactiques par les élèves (au regard de leurs possibles interprétations des objets du monde), lesquels, s'ils demeurent considérés comme élèves génériques (au pluriel), ne sont peut-être plus tout à fait les sujets « strictement » épistémiques (ou en tout cas, appréhendés au seul prisme de leurs connaissances « strictement » mathématiques) considérés au départ dans la TSD. Cela va certes de pair avec de nouveaux contours donnés à des connaissances et à des savoirs circulant d'une discipline à l'autre (comme l'énumération[22]), parfois transparents dans l'univers scolaire, que ces deux chercheuses appréhendent au prisme du couple oralité/littératie, toujours en référence aux travaux de Goody, qui englobe des problématiques potentiellement liées aux usages du langage verbal (même si l'oralité ne se limite pas à l'oral et la littératie à l'écrit[23]).

Coulange (2014, 2015), engagée initialement dans la voie de l'articulation entre TSD et secondarisation, s'interroge dans cette même direction, en se penchant quant à elle sur de possibles complémentarités entre la notion de milieu et celle de contexte désignant « tout ce qui fait sens pour l'élève dans l'univers social des tâches scolaires » (Bernié, 2004 ; Brossard, 1992) et intégrant potentiellement des dimensions langagières verbales. Une première tentative de rapprochement de ces deux notions (Coulange & Train, soumis) soulève des questions au demeurant assez complexes relativement aux façons différentes d'appréhender la reproductibilité de phénomènes liés à l'apprentissage et à l'enseignement dans la TSD et dans l'approche liée à l'hypothèse de communauté discursive (Bernié, 2002). Si la question de la reproductibilité est essentiellement liée aux caractéristiques des situations et notamment du milieu, s'agissant de la notion de contexte, cette reproductibilité est intrinsèquement liée au rôle joué par le langage et même par les pratiques langagières notamment verbales (sociolo-

21 Les auteurs qualifient de « transparent(e) » un savoir ou une connaissance qui joue un rôle dans la situation mais n'est pas explicitement identifiée par l'enseignant (ni l'élève).

22 L'énumération a été identifiée comme un savoir mathématique sur lequel repose l'enseignement et l'apprentissage du dénombrement (Briand, 1999). Laparra et Margolinas (2016) l'ont appréhendée comme un savoir « transparent », convoqué au-delà des mathématiques enseignées.

23 L'oralité réfère en effet à toutes les ressources verbales et corporelles permettant d'agir à l'aide ou sur des objets du monde de manière fortement « routinisée » et, de la même manière, la littératie ne se limite pas à l'écrit mais utilise les ressources de l'écrit pour noter la langue et aussi pour organiser les corps et les objets du monde avec un usage raisonné (Laparra & Margolinas, 2016).

giquement situées) dans les contextes liés aux tâches scolaires, investis par les élèves et les enseignants – sans négliger des dimensions intra- et inter-subjectives liées à la façon dont ils (co-)construisent ces contextes. Les négociations de ces contextes ou leurs mises en tension au sein de la communauté discursive scolaire conduisent à des réorganisations des modes d'*agir-parler-penser*, en vue de construire un contexte partagé « pertinent » (Brossard, 1998, 2004 ; Jaubert, 2007) car propice aux apprentissages visés. Ainsi, dans une situation d'introduction des fractions observée dans plusieurs classes de primaire (Coulange & Train, soumis), la présence dans le milieu d'une bande à utiliser comme étalon pour mesurer la longueur de segments (et l'absence d'autres outils tels que la règle graduée) permet bien d'appréhender *a priori* la reproductibilité d'actions d'élèves possiblement convoquées dans la mesure des segments donnés avec l'outil « bande », sous-tendues par des connaissances mathématiques (liées à l'usage d'un étalon de longueur). Les interactions verbales de l'enseignant et des élèves, au sujet de la « bande », mais aussi au sujet du mot « quart », ou encore de l'écriture symbolique « 3/4 » (verbalisée « trois quarts » mais aussi « trois sur quatre ») permettant de co-construire des contextes ou de les faire évoluer contribuent ainsi à la construction des connaissances mathématiques visées. Ce sont autant d'éléments qui participent du rôle du langage verbal dans l'enseignement et l'apprentissage des connaissances mathématiques visées. La notion de milieu permet ainsi d'appréhender la question de la reproductibilité de phénomènes didactiques au regard de caractéristiques « matérielles » d'une situation didactique, à même d'orienter une part des activités d'élèves, spécifiques des connaissances mathématiques. La notion de contexte renvoie quant à elle à ce qui pourrait s'avérer reproductible du point de vue de la négociation de significations (d'une tâche scolaire, d'une notion mathématique, etc.) liée aux savoirs visés et à leur conceptualisation, dans et par le langage (notamment verbal). Ces différences ne sont pas sans lien avec les arrière-plans respectifs des deux approches théoriques en jeu, piagétien pour l'une (la théorie des situations), vygotskien pour l'autre (l'hypothèse de communauté discursive disciplinaire scolaire).

Nous reviendrons sur les questions ainsi ouvertes qui restent largement à explorer et à documenter, d'autant que, comme on le verra ci-après, la voie de cette deuxième approche liée à la notion de secondarisation des pratiques langagières n'est pas empruntée en didactique des mathématiques au seul motif des complémentarités possibles avec la TSD.

De nouvelles questions sur les ostensifs langagiers « verbaux » dans la théorie anthropologique du didactique

En ce qui concerne la théorie anthropologique du didactique (TAD), peu de travaux semblent avoir été développés récemment en lien avec le langage verbal. La thèse de Millon-Fauré (2011), quoique positionnée dans le cadre d'une approche théorique développée plus récemment, celle de la théorie de l'action conjointe (Sensevy & Mercier, 2007), reprend toutefois la notion d'ostensif pour étudier les répercussions de difficultés langagières d'élèves migrants dans l'activité mathématique en classe. Cette thèse met notamment en avant un phénomène qualifié de *refoulement didactique* dans le discours de l'enseignant adressé à un public d'élèves migrants : c'est-à-dire une censure dans le discours du professeur qui renonce à utiliser des ostensifs langagiers relevant d'un lexique spécifique des mathématiques, car il les considère non disponibles dans la langue commune de la classe, ce qui l'entraîne à utiliser et à accepter l'utilisation de termes vagues ou approximatifs de la part des élèves, au sein de la classe de mathématiques. Ceci constitue potentiellement un cercle vicieux faisant d'une part obstacle à l'apprentissage de connaissances lexicales spécifiques par les élèves, d'autre part entravant potentiellement l'accès aux apprentissages mathématiques visés. Toutefois, l'auteure de la thèse interroge assez peu la dialectique ostensifs/non-ostensifs dans ce contexte spécifique d'enseignement et d'apprentissage. Autrement dit, l'accent est mis sur la présence ou l'absence

des ostensifs langagiers lexicaux, sans nécessairement interroger plus avant ce qui peut contribuer ou non à piloter les non-ostensifs en jeu ou visés : on peut ainsi imaginer un élève allophone ayant accès à un lexique réduit pouvant par exemple utiliser le mot « carré » pour désigner un cube, tout en sachant qu'il parle d'un cube et non d'un carré – en « détournant » en quelque sorte l'ostensif « carré » en l'absence du mot « cube » dans son répertoire lexical (ce qu'on observe d'ailleurs parfois chez de jeunes élèves francophones). Cela peut bien sûr être un support nécessaire à la poursuite de son activité, mais aussi occasionner des malentendus si ce n'est pas considéré comme une étape intermédiaire dont il faut identifier les limites et ainsi la nécessité de nouveaux ostensifs. Un tel questionnement dépasse d'ailleurs peut-être le cadre même de cette thèse, qui contribue néanmoins à le faire émerger, en réintégrant la dialectique ostensif/non-ostensif dans l'étude de l'activité mathématique des élèves. Comment avoir des moyens de contrôle sur cette dialectique ostensifs/non-ostensifs du point de vue de l'élève et même, des élèves ? Dans l'étude d'organisations praxéologiques de savoirs institutionnels, ce contrôle repose sur l'étude de la double valence sémiotique et instrumentale – ce qui implique que l'étude des fonctions des ostensifs ne soit pas réduite à leur seule présence/absence. Mais qu'en est-il dans l'activité mathématique des élèves, non nécessairement conforme à ces praxéologies ? La théorie anthropologique investit le point de vue de l'activité mathématique de l'élève, en introduisant d'abord la notion de rapports personnels des sujets aux savoirs, puis dans ses développements plus récents en réintégrant la notion de « praxéologies mathématiques personnelles » (Croset & Chaachoua, 2016). Précisément, ces derniers développements théoriques renouvellent potentiellement des questions liées à cette dialectique ostensifs/non-ostensifs. Une des hypothèses formulées en lien avec la notion de « praxéologie personnelle » (intervention de Chaachoua dans Coulange & Vandebrouck, 2021a, 2021b) est la suivante : ce que les élèves tendraient à rendre public de leur activité mathématique (soit ce qui est observable en termes de manipulations d'ostensifs) viserait à rester conforme autant que possible aux praxéologies mathématiques institutionnelles. Cela peut notamment contribuer à rendre difficile d'accès ce qui se joue du point de vue des non-ostensifs en jeu dans l'activité des élèves que le chercheur observe.

Il ne paraît donc pas si simple dans le cadre de cette théorie, ou dans des emprunts qui lui sont faits, mais peut-être aussi dans d'autres approches, de relever le défi de déterminer des observables langagiers (et encore plus, s'agissant du langage verbal dont nous avons vu qu'il était potentiellement porteur d'ambiguïtés) de l'activité des élèves et même de celle de l'enseignant dans la classe de mathématiques. Nous serons conduites à y revenir.

Des développements liés à l'analyse logique du langage dans la théorie des champs conceptuels

Des recherches en didactique des mathématiques s'inscrivant dans la continuité des travaux de Vergnaud ont mis en avant la nécessité, dans l'étude des processus de conceptualisation, de s'intéresser à la structure logique des énoncés, notamment des énoncés relevant du langage verbal (ceux formulés par l'enseignant et les élèves). Durand-Guerrier (1996, 2013) a initié cette voie en l'investissant à la fois dans ses recherches personnelles sur le sujet et dans celles conduites dans le cadre de plusieurs thèses qu'elle a dirigées (Kouki, 2008 ; Barrier, 2009 ; Sadja Kam, 2013).

Ces travaux visent à montrer la pertinence de cette approche d'une part dans l'analyse *a priori* et *a posteriori* des situations d'apprentissages, en particulier pour contribuer à l'interprétation des traces écrites et orales de l'activité des élèves (Durand-Guerrier, 2013). Les premières recherches menées dans ce sens, conduites ou dirigées par Durand Guerrier mais aussi par quelques autres (Deloustal-Jorrand, 2004 ; Fabert & Grenier, 2011 ; Hache, 2015) et portant pour une large part sur l'enseignement supérieur, ont montré la complexité des enjeux d'ap-

prentissage liés aux structures logiques des énoncés mathématiques associées notamment à la négation et à la quantification logique, à la fois du fait de leur complexité intrinsèque mais aussi par les utilisations spécifiques de la langue française que cela suppose au regard des usages quotidiens. Ainsi, par exemple, Durand-Guerrier (2013) revient-elle sur la complexité de la négation en mathématiques et de sa prise en charge par le langage verbal en prenant comme exemple la négation de la phrase « tous les diviseurs de 12 sont pairs ». Selon la norme linguistique française, cette négation s'exprime par : « tous les diviseurs de 12 ne sont pas pairs » ; ce dernier énoncé est mathématiquement vrai (puisque par exemple 3 est un diviseur de 12) mais si l'on remplace dans la phrase la propriété « ne pas être pair » par la formulation « être impair » qui lui est logiquement équivalente, on obtient la proposition « tous les diviseurs de 12 sont impairs », qui est, elle, une proposition fausse (puisque 4 est un diviseur de 12), alors même que deux propositions équivalentes ont, par définition, la même valeur de vérité.

Certains travaux ont également porté sur les difficultés spécifiques aux situations de bilinguisme, dans lesquelles s'ajoute à la complexité le fait que les modalités de prise en charge d'un certain nombre d'éléments logiques sont différentes selon les langues. Des prolongements de ces travaux ont amené à étendre les études à l'enseignement secondaire, ainsi qu'à montrer les apports des modélisations logiques dans l'étude des situations de validation en mathématiques, ce dernier aspect étant notamment développé dans la thèse de Barrier (2009) ou encore chez Hache (2019).

Barrier, Durand-Guerrier et Mesnil (2019) synthétisent ainsi les apports de cette approche dans l'analyse de situations d'enseignement et d'apprentissage liées à l'apprentissage de notions mathématiques mais aussi de la démonstration ou de la logique, à des niveaux variés, dans le supérieur et dans l'enseignement secondaire. En s'appuyant sur les travaux mentionnés ci-dessus, ils illustrent son potentiel pour l'étude des processus de conceptualisation (en reprenant notamment l'exemple de la symétrie orthogonale de Vergnaud cité précédemment), pour l'étude des énoncés (en mettant en valeur la complexité de l'articulation entre langage symbolique formalisé et langage naturel), enfin pour l'étude de la validation, en reprenant l'analyse de démonstrations mathématiques proposées dans la thèse de Barrier (2009).

Les questions langagières dans une approche théorique ancrée en théorie de l'activité

En s'inscrivant également dans le prolongement des travaux de Vergnaud mais en ouvrant une autre voie, plusieurs chercheurs, dans la lignée du développement de la double approche didactique et ergonomique des pratiques (Robert & Rogalski, 2002) se sont intéressés aux dimensions langagières des pratiques enseignantes. C'est davantage ici sur les travaux de Vygotski – suggéré dans certains écrits de Vergnaud lui-même – que s'appuient ces recherches, en les articulant avec des apports de la didactique des mathématiques, et en s'inscrivant dans le même temps dans un mouvement plus global de développement d'un cadre théorique ancré en théorie de l'activité et articulant les apports de Piaget et Vygotski pour l'étude du processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques dans le cadre scolaire (Vandebrouck, 2008 ; Robert, 2008a, 2008b ; Chesnais, 2018a, 2021b).

Ce travail sur les pratiques enseignantes et leurs effets potentiels sur les apprentissages des élèves a notamment conduit ces chercheurs à s'intéresser spécifiquement aux discours dans les classes de mathématiques « ordinaires », pour caractériser les variations et régularités des usages du langage entre enseignants et pour un même enseignant selon diverses variables (la classe, le sujet, etc.). Ils se sont notamment intéressés au langage verbal en étudiant les commentaires méta-mathématiques faits par les enseignants, au-delà du discours strictement mathématique (Robert & Robinet, 1996). Ainsi, Robert et Tenaud (1988), Josse et Robert (1993), Chiocca (1995) ou Robert (1995) ont mis en évidence la variabilité, dans les pratiques ordinaires,

des « discours d'accompagnement », du méta et de leur rôle dans l'exposition de certaines notions mathématiques. Hache (2001) a également étudié la manière dont les discours contribuent à définir les « univers mathématiques » que les enseignants font fréquenter en classe à leurs élèves. Quant à Pariès (2004, repris dans Chappet-Pariès & Robert, 2014), son travail a permis d'identifier des structures d'échanges et des facteurs de variabilité dans les discours des enseignants, en étudiant la diversité des répartitions des buts illocutoires avec des outils issus de la pragmatique.

Enfin, toujours en s'inscrivant dans cette approche mais en s'intéressant cette fois davantage au rôle du langage dans la formulation des connaissances, les travaux de Butlen et Pézard (2003) ont montré la nécessité, au moins pour certains élèves (en particulier pour des élèves de milieux socioculturels défavorisés), d'une étape dans le processus de conceptualisation : lorsqu'ils sont confrontés à la demande de produire des énoncés de savoirs « à retenir » à partir d'une situation, certains élèves produisent des énoncés intermédiaires entre des énoncés très contextualisés décrivant des cas particuliers travaillés dans une situation donnée et des énoncés plus formels généralisés correspondant à la formulation du savoir décontextualisé : ces énoncés intermédiaires sont qualifiés d'« exemples génériques » du fait qu'ils témoignent d'une formulation d'une règle illustrée dans un cas particulier.

Conclusion de la deuxième partie

Cette deuxième partie montre que les questions autour du rôle du langage verbal dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ont fait l'objet d'un regain d'intérêt dans le champ de la didactique des mathématiques durant ces deux dernières décennies.

Ces questions ont amené des développements des théories existantes en didactique des mathématiques, comme la TSD ou la TAD. Les travaux de Vergnaud, par leur particularité d'accorder un rôle spécifique au langage verbal dans le processus de conceptualisation, ont pu inspirer des développements variés dépassant le cadre de la TCC *stricto sensu*, y compris en nourrissant le cadre théorique ancré en théorie de l'activité évoqué précédemment et sur lequel nous revenons dans la section suivante.

Ces développements s'inscrivent chacun plus ou moins en continuité directe avec les notions et outils initiaux des différentes théories dont ils se réclament, mais ont souvent la particularité de s'appuyer sur des apports issus d'autres champs de recherche (notamment la logique, la didactique du français ou la linguistique, voire la sociolinguistique). On peut noter en particulier l'intérêt porté à la notion de secondarisation des discours, investie de différentes façons par plusieurs chercheurs du champ dont les travaux sont ancrés dans des cadres théoriques différents.

Ces développements s'inscrivent également dans l'évolution plus globale du champ de la didactique des mathématiques, ayant intégré dans les dernières décennies des questionnements sur les pratiques enseignantes et le processus d'enseignement-apprentissage dans le cadre scolaire « ordinaire », y compris en lien avec un questionnement concernant la construction des inégalités d'apprentissage (Coulange & Rochex, 2014 ; Coulange & Vandebrouck, 2021a).

Ces derniers éléments témoignent d'un questionnement de nature épistémologique, voire d'un renouvellement des arrière-plans des théories didactiques, notamment sur le plan psychologique, et des hypothèses fondatrices liées à ces arrière-plans concernant la conceptualisation, l'enseignement et le rôle du langage dans ces processus.

Proposition d'une problématisation en quatre entrées, à partir d'un cadre théorique ancré en théorie de l'activité

Nous proposons, dans cette troisième partie, une problématisation des questions liées au rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, ébauchée par Chesnais (2018a). Il s'agit de mettre en lien les différents travaux évoqués ci-dessus et de proposer des perspectives pour structurer les recherches sur ce thème autour de quatre grandes questions. Cette problématisation s'inscrit dans le développement évoqué précédemment d'un cadre théorique ancré en théorie de l'activité pour l'étude du processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques en situation scolaire.

La question du langage émerge en effet, au sein des travaux menés dans ce cadre, dans la lignée des questions liées à l'étude des pratiques enseignantes « ordinaires » et de leurs effets sur les apprentissages des élèves qui sont à l'origine de son développement, du fait même du rôle central accordé aux *activités* des élèves et des enseignants. Sans rentrer dans les détails de la construction de ce cadre et de ses implications méthodologiques que le lecteur pourra retrouver dans de multiples références[24], nous précisons rapidement quelques éléments qui éclairent les problématisations proposées des questions langagières. S'inscrivant dans la théorie de l'activité adaptée aux mathématiques en situation scolaire (Robert, 2008a, 2008b ; Rogalski, 2008), il s'agit essentiellement, d'accorder un rôle central au langage – notamment au langage verbal – comme instrument psychologique privilégié du développement humain et de l'accès aux savoirs.

L'« apprentissage » est référé à l'accession à un certain degré de conceptualisation, défini, dans la lignée des travaux de Vergnaud (1990), par la disponibilité du savoir visé dans la résolution d'un ensemble de tâches établi à partir des programmes, et comprend sa mise en relation avec les connaissances antérieures et la maîtrise d'un certain nombre de signifiants, notamment langagiers. La caractérisation du potentiel, en termes d'apprentissage, des tâches proposées aux élèves, ainsi que celle de l'évaluation du degré de conceptualisation atteint par les élèves reposent sur un certain nombre d'hypothèses. Ces hypothèses sur « ce qui fait apprendre » (Robert, 2008b), fondatrices du cadre, s'articulent essentiellement autour de deux idées centrales, en appui sur les théories de Piaget, Vygotski et Vergnaud – articulées et replacées dans le contexte de l'enseignement des mathématiques dans un cadre scolaire. La première idée est que le potentiel des tâches proposées aux élèves en termes d'apprentissages est à apprécier au regard d'une analyse épistémologique et didactique des savoirs visés, incluant la question de leur intégration dans les connaissances anciennes des élèves ; la seconde est que la réalisation de ce potentiel est fortement dépendante des conditions de réalisation des tâches et, en particulier, de l'accompagnement de cette réalisation par l'enseignant – en lien avec l'idée d'étayage au sens de Bruner (1983) et de Zone proximale de développement issue des travaux de Vygotski (Rogalski, 2008). Comme l'illustreront les développements ci-dessous, le rôle du langage, notamment du langage verbal, est essentiel de ces deux points de vue, et les dimensions sociologiques et psychologiques, voire affectives des sujets (élève et enseignant) sont potentiellement prises en charge par cet arrière-plan.

Dans la continuité des premiers travaux réalisés dans ce cadre théorique sur des questions ayant trait au rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques cités précédemment (notamment Pariès, 2004 ; Chappet-Pariès & Robert, 2014 ; Butlen & Pézard, 2003), les travaux de Chesnais concernant la construction des inégalités socio-scolaires dans les classes de mathématiques (voir Chesnais, 2020, pour une synthèse) l'ont amenée à

24 Notamment Robert (2008 a, 2008b), Rogalski (2008), Chesnais (2018b) ou Vandebrouck, Robert, Rogalski *et al.* (2013).

problématiser les questions de recherche concernant le langage en quatre entrées[25] (Chesnais, 2018a). S'interroger sur le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques suppose ainsi de questionner le rôle du langage comme objet d'apprentissage et d'enseignement, comme moyen d'apprentissage, enfin comme moyen d'enseignement ; cela nécessite en outre de s'intéresser au langage en tant qu'outil pour le chercheur, comme trace de l'activité des élèves et des enseignants. Chacune de ces quatre problématiques inclut les précédentes mais ne s'y réduit pas.

Nous proposons dans cette partie de présenter quelques questions et pistes de recherche plus spécifiques, liées à chacune de ces entrées.

Le langage comme objet d'apprentissage et d'enseignement

En souscrivant à la position de Vergnaud, postulant que les mathématiques ne sont pas un langage mais une *connaissance*[26], il s'agit de considérer que les pratiques mathématiques incluent des pratiques langagières spécifiques[27] et qu'apprendre les mathématiques suppose, implique, voire nécessite de s'approprier ces pratiques langagières.

Caractériser ces pratiques langagières permet d'identifier des enjeux d'apprentissage et d'éventuels obstacles dans le processus d'enseignement-apprentissage des savoirs mathématiques. Il s'agit de caractériser la « complexité du dire » au-delà de celle du faire (Vergnaud, 1990), notamment en identifiant les « ruptures » entre ces pratiques langagières et celles du quotidien, celles d'autres disciplines ou encore au regard d'autres langues (lorsque l'on considère l'apprentissage par des élèves dont la langue de scolarisation n'est pas la langue familiale). Certains aspects de cette complexité ont été identifiés dans les recherches précédemment citées, qu'il s'agisse de questions lexicales ou encore des questions de prise en charge des aspects logiques dans le langage verbal. Le caractère détemporalisé et dépersonnalisé des énoncés mathématiques apparaît également comme un élément important.

Au-delà des formes linguistiques (lexique et syntaxe) du discours mathématique, les pratiques langagières mathématiques correspondent aussi à des « usages de la langue » spécifiques, contribuant à définir « un univers de pensée et de langage spécifique »[28] (Bautier, 1995, 2007). Les travaux français menés dans les différents cadres théoriques mentionnés dans cet article mettent ainsi en évidence ces spécificités, liées à la nature même de l'activité mathématique : non seulement par la nature de ses objets, fondamentalement non perceptibles directement par les sens, nécessitant d'être manipulés à travers l'usage de divers ostensifs[29], mais aussi par la nature de pratiques telles que la *définition* (mathématique) ou la *démonstration* – activité fondée sur l'idée du développement d'une théorie à partir d'une axiomatique et de règles logiques. Ces pratiques sont à la fois difficiles à prendre en charge dans le langage verbal et impossibles à mener sans lui (Duval, 1995 ; Vergnaud, 1991, 2001 ; Hache, 2019). Les pratiques

25 Cette proposition de « quatre entrées » doit beaucoup à la collaboration avec des chercheurs d'autres disciplines s'intéressant aux questions langagières au sein du LIRDEF, notamment avec Jean-Charles Chabanne, Yves Soulé et Martine Dreyfus.

26 Cette position est largement consensuelle aujourd'hui dans la communauté de didactique des mathématiques française (Chevallard, 1980 ; Vergnaud, 1990, 2001 ; Bosch & Perrin-Glorian, 2013 ; Duval, 1995 ; Laborde, 1982).

27 Rejoignant ici, d'une certaine manière, l'hypothèse des communautés discursives disciplinaires (Jaubert, Rebière & Bernié, 2012).

28 Bautier pointe le rôle essentiel de ces usages dans la différentiation des apprentissages à l'école : « […] les usages de la langue sont à distinguer des formes linguistiques (le lexique et la syntaxe). Même s'il existe un lien étroit entre les deux, il est plus important si l'on veut comprendre et intervenir dans la différenciation socio-langagière à l'école, de poser la question en termes de différences d'usages plutôt que de différences de lexique ou de syntaxe » (Bautier, 2007, p. 75).

29 Avec par ailleurs une tendance dans les discours à amalgamer les non-ostensifs aux ostensifs associés : en particulier la figure et son dessin, la variable et son nom x, etc.

langagières mathématiques sont ainsi fortement littératiées[30], dès les apprentissages les plus élémentaires (Laparra & Margolinas, 2016), et, de fait, éloignées des pratiques langagières dont les élèves sont familiers par ailleurs.

Par exemple, parler de « construction d'une figure à la règle et au compas » en géométrie ne renvoie pas à la possibilité matérielle d'en produire un dessin en utilisant des instruments, mais au fait d'étudier sa *constructibilité* à partir des axiomes de la géométrie euclidienne, c'est-à-dire la possibilité théorique de l'obtenir uniquement à partir d'alignements (référence à la règle – non graduée) et de reports de longueurs (référence au compas). Le programme de construction d'une figure correspond alors à la suite des opérations réglées par des propriétés de la figure qui permettent (théoriquement) de l'obtenir. Sa validité repose sur la possibilité, non pas de le réaliser matériellement, mais sur la démonstration du fait qu'il permet bien d'obtenir une figure satisfaisant les propriétés qui la caractérisent.

Les pratiques langagières mathématiques expertes objets d'apprentissage sont évidemment au cœur de cette problématique, mais on peut également identifier le rôle de formes langagières intermédiaires. On peut aussi penser à la désignation d'un certain nombre d'actions matérielles qui interviennent dans l'activité mathématique dans le cadre de l'apprentissage : ainsi, les discours décrivant les activités de dessin en géométrie[31] (Chesnais, 2014 ; Gobert, 2014), la notion de « superposabilité » (en lien avec la notion d'isométrie, Bosch & Perrin-Glorian, 2013), ou encore celle de « retournement » (liée à la propriété d'antisymétrie de la symétrie axiale, Chesnais & Mathé, 2014), identifiées comme jouant un rôle dans l'appréhension des figures géométriques et des transformations dans l'enseignement élémentaire jusqu'au début du secondaire. Dans le même ordre d'idée se pose la question des discours permettant de désigner les transformations d'écritures symboliques (Constantin, 2019) nécessaires pour « faire » du calcul algébrique. On retrouve ici le rôle particulier du langage verbal, parmi les différents registres de représentation sémiotique, en particulier dans son rôle de « métalangage de tous les symbolismes » (Vergnaud, 1991), c'est-à-dire sa fonction métadiscursive associée à d'autres registres de représentation sémiotique (visuels ou formels) dans l'activité mathématique. Ces pratiques langagières intermédiaires ne doivent pas être considérées comme implicitement prises en charge par les élèves, au risque, sinon, que leur caractère implicite contribue à la « transparence » de certains savoirs mathématiques (au sens de Margolinas & Laparra, 2011, cf. *supra*).

Elles peuvent (doivent ?) donc devenir objet d'apprentissage et d'enseignement dans la classe de mathématiques, mais, pour une part, seulement localement (à un moment de l'apprentissage voire dans une classe donnée ou pour certains élèves), en étant destinées à disparaître à plus ou moins long terme. Une des questions qui se pose alors est celle d'une référence pour légitimer ces pratiques langagières « intermédiaires »[32] puisqu'elles sont en général non observables dans les pratiques expertes, notamment parce qu'elles ont pu exister à un moment de l'histoire mais ont ensuite disparu pour être remplacées par des formes plus élaborées.

Étudier le langage comme objet d'apprentissage dans le processus d'enseignement-apprentissage suppose donc de recenser les formes langagières auxquelles sont confrontés les élèves, celles qu'ils produisent, celles qui sont visées et attendues par les enseignants aux différentes étapes de l'apprentissage. On peut en particulier faire l'hypothèse que

30 « Nous disons qu'il y a littératie quand un groupe humain se meut et agit dans un espace qui organise les corps et les objets du monde selon les ressources fournies par l'écrit et qu'il pratique un usage raisonné et organisé de ces ressources » (Laparra & Margolinas, 2012).

31 Dont Petitfour (2017) montre le rôle potentiel dans l'apprentissage, en particulier dans le cas d'élèves dyspraxiques.

32 Pour se rapprocher d'une appréhension de ces phénomènes par la TAD, du point de vue de la transposition didactique, la question qui se pose est celle de ce qui peut faire « référence » dans l'étude de praxéologies mathématiques à enseigner, enseignées ou apprises – soit des praxéologies de référence des savoirs.

l'appropriation de ces pratiques langagières doit être liée à leur utilité, voire leur nécessité dans les pratiques mathématiques (ce qui a été mis en avant dans les théories du champ précédemment citées), puisqu'il est nécessaire de disposer de mots et tournures syntaxiques pour désigner des concepts ou opérations propres aux mathématiques. Toutefois, certaines formes langagières résultent aussi pour une part de choix plus ou moins arbitraires situés culturellement (notamment historiquement et géographiquement[33]). Une autre question, davantage mise en avant dans un arrière-plan théorique, tel que celui retenu ici, ancré sur la théorie de l'activité, concerne la prise en charge de ces enjeux dans le processus d'enseignement et d'apprentissage, notamment *via* les discours de l'enseignant. Il s'agit alors d'interroger les possibilités offertes en classe aux élèves de les identifier avec leurs spécificités et leurs usages, ainsi que les occasions et possibilités de se les approprier.

Le langage comme moyen d'apprentissage

Étudier le rôle du langage (verbal) « dans la relation didactique » (Vergnaud, 1991, p. 83) suppose également de s'interroger sur le rôle du langage comme *moyen* dans la conceptualisation des mathématiques, ceci incluant la question du rôle des pratiques langagières objets (en particulier les pratiques mathématiques de référence) dans ce processus, mais ne s'y réduisant pas. En effet, comme le pointe Vergnaud (cf. *supra*), les fonctions du langage dans la relation didactique recouvrent, en plus de la communication et de la représentation, une fonction d'« aide à la pensée et à l'organisation de l'action » et l'ensemble de ces fonctions ne peuvent être assurées par les pratiques langagières mathématiques expertes, d'une part parce que, dans le cadre du processus d'apprentissage, ces pratiques ne sont pas encore maîtrisées ; d'autre part, parce que les activités de l'enseignant et de l'élève dans le cadre du processus d'enseignement-apprentissage (notamment dans le cadre scolaire) ne se limitent pas à une activité mathématique au sens des pratiques de référence.

Le langage est alors considéré comme instrument psychologique et social privilégié du processus de conceptualisation par un sujet et ainsi média essentiel, à la fois par sa dimension sociale et cognitive, de l'activité de l'élève (Vygotski, [1934] 1997 ; Vergnaud, 1991, 2001 ; Rogalski, 2008, 2013).

Ces considérations amènent à décliner plusieurs questions, à propos de chacune desquelles on peut établir quelques premiers résultats et des pistes de recherche plus précises.

La première question de recherche concerne le rapport dialectique du développement du *dire* et du *faire* dans le processus de conceptualisation chez un sujet : le développement de nouveaux concepts est indissociable du développement de nouveaux moyens langagiers, en particulier par le processus de « nominalisation » (Vergnaud, cf. *supra*) par lequel un nouvel objet émerge comme objet de discours dont on peut alors considérer les propriétés et les relations avec d'autres objets. Notons que ce processus ne se limite pas à la question de l'introduction de nouveaux noms communs pour désigner les objets : d'une part il s'agit souvent de locutions incluant plusieurs mots (« axe de symétrie », « équation de droite », « domaine de définition d'une fonction »…) ; d'autre part, la désignation des relations entre objets – essentielles en mathématiques – nécessite également des constructions syntaxiques parfois complexes (par exemple pour désigner le rapport entre deux figures et une droite lorsque l'une des figures est « symétrique de l'autre par rapport à la droite »).

33 Par exemple, si, à propos de symétrie axiale, l'adjectif « symétrique » désigne en français à la fois une figure qui possède un axe de symétrie et une figure symétrique d'une autre par rapport à un axe, il n'en est pas de même pour « symmetric » en anglais ou « symmetrisch » en allemand, qui sont réservés au premier sens, le second étant pris en charge par des expressions faisant référence au miroir (« mirror-image » ou « spiegelbild »), ce qui a pour conséquence des enjeux différents pour l'apprentissage, par exemple dans la construction du lien conceptuel entre les deux situations (Chesnais & Auger, à paraître).

La mise en mots des invariants opératoires apparus initialement « en actes » contribue ainsi non seulement potentiellement à l'appropriation des pratiques langagières mathématiques expertes, mais aussi à la maîtrise de ces invariants opératoires par leur identification, permettant la mise en discussion de leurs domaines d'application et de validité, puisqu'elle permet de « rendre explicite ce qui n'était qu'implicite et lui donner ainsi un caractère public, qui permet de le soumettre au débat et à la preuve » (Vergnaud, 1991, p. 85). On retrouve ici le jeu entre les formes opératoire et prédicative des connaissances (Vergnaud, 2001), essentiel dans le processus de conceptualisation.

À ce propos, on peut faire l'hypothèse que l'introduction de formulations expertes ainsi que l'exigence par l'enseignant de leur emploi par les élèves de façon trop précoce ou déconnectée des besoins de résolution de tâches mathématiques puissent générer des difficultés de conceptualisation pour les élèves (l'usage des formulations expertes avec suffisamment de lien avec les objets visés se situant alors hors de la zone proximale de développement), voire des « malentendus »[34] plus fondamentaux encore sur la nature de l'activité mathématique (vue alors potentiellement comme purement « formelle ») et des apprentissages scolaires.

La deuxième question de recherche porte sur le rôle de la dimension langagière dans le développement de l'activité des élèves, considéré du double point de vue cognitif et social, et de leurs articulations. On peut ainsi s'interroger sur le rôle des verbalisations orales et écrites, notamment « méta », qu'elles soient produites par l'élève lui-même, ses pairs ou l'enseignant, seul ou en collaboration, incluant du « langage mathématique » ou pas uniquement[35] dans le développement de l'activité cognitive de l'élève et sa contribution au processus de conceptualisation. On retrouve ici notamment le rôle du langage comme aide à la pensée et à l'organisation de l'action (Vergnaud, 1991, p. 85). Du point de vue social, on peut questionner le rôle du langage dans la construction collective (appuyée sur les activités individuelles) de connaissances et de savoirs, en incluant la question de l'institutionnalisation. Les savoirs qui émergent de cette construction collective doivent être appropriés par chacun dans un mouvement cette fois du collectif vers le sujet. On peut voir ici un écho de l'idée vygotskienne que toute fonction cognitive supérieure apparaît d'abord collectivement, avant d'être intériorisée.

Enfin, la troisième question porte sur le rôle du langagier (métamathématique, aussi avec une dimension méta sur *l'apprentissage* des mathématiques) en lien avec l'idée d'explicitation, et notamment avec la notion d'étayage.

En s'intéressant au rôle de l'accompagnement langagier comme visant à étayer le processus d'apprentissage pour tous les élèves, le questionnement peut porter sur des variations inter-individuelles qui ne relèvent pas du sujet « purement épistémique » mais qui présentent une dimension psychologique et sociologique, voire affective, qui exerce une influence sur la part individuelle du processus d'apprentissage. Le cadre choisi permet d'interroger ces dynamiques et leurs liens en considérant des sujets psychologiquement et socialement situés qu'on peut qualifier à la suite de Rogalski (2008) de « sujets-personnes » (Chesnais, 2021b). C'est en

34 De nombreux travaux (menés au sein du réseau REcherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages RESEIDA, notamment) ont mis en évidence le rôle de « malentendus » (Bautier & Rochex, 1997 ; Bonnéry, 2007 ; Bautier & Rayou, 2009 ; Rochex & Crinon, 2011) entre l'institution scolaire et certains élèves (en particulier du fait de leur origine socioculturelle), résultant de la conjonction entre certains attendus de l'institution scolaire et certaines caractéristiques de ces élèves, et qui pourraient expliquer au moins en partie les liens entre inégalités d'apprentissage et inégalités sociales.

35 Comme production langagière n'incluant pas que du langage mathématique, on peut penser notamment aux « narrations de recherche » (Sauter, 1998) correspondant comme leur nom l'indique à des récits relatant le déroulement de l'activité qu'ont développée les élèves dans le cadre d'une résolution de problème mathématique. Il ne s'agit là que d'un exemple, au sujet duquel nous avons pu d'ailleurs indiquer par ailleurs qu'en l'absence de conditions liées à la préparation d'un tel écrit scolaire en classe de mathématiques, ces « narrations de recherche » avaient de fortes chances de s'avérer éloignées de pratiques langagières mathématiques (Coulange, Kervyn & Plissonneau, 2019), ce qui invite à questionner leur rôle dans les apprentissages.

particulier dans ce cadre que se situent les recherches visant à identifier les malentendus possibles entre l'école et certains élèves, en lien avec leur origine socio-culturelle.

Du point de vue sociologique, le langage verbal joue un rôle central dans la façon dont se jouent de tels malentendus dans la classe de mathématiques (Coulange, 2014 ; Champagne & Coulange, 2019 ; Chesnais, 2018b). En reprenant l'exemple de la construction de figures en géométrie, on peut citer cet extrait de verbatim d'une séance de classe en éducation prioritaire évoqué dans Chesnais (2018a) : lorsque l'enseignant demande, en classe de sixième, « qu'est-ce qu'on utilise pour construire le symétrique du point ? », les réponses des élèves, selon qu'ils répondent « l'équerre » ou « la définition [du symétrique d'un point par rapport à une droite] »[36] – témoignent d'une interprétation différente de la question posée et, de fait, d'un rapport assez différent à l'activité géométrique (scolaire), la deuxième étant plus proche des pratiques expertes et des questions de constructibilité (cf. *supra*) et correspondant aux attendus des enseignants à partir d'un certain niveau scolaire, la première restant ancrée dans un rapport matériel aux dessins géométriques.

La secondarisation des genres de discours : un outil théorique pour interroger ces phénomènes

La notion de secondarisation des genres de discours apparaît comme pertinente pour décrire et interroger ces phénomènes. En effet, elle permet d'identifier les processus de construction de pratiques spécifiques de la communauté discursive mathématique scolaire, incluant en horizon les pratiques de la communauté discursive mathématique de référence tout en accordant un rôle aux discours intermédiaires, parce qu'elle s'intéresse aux déplacements et dénivellations au cours du processus.

En reprenant l'exemple précédent de la construction de figures en géométrie, on peut interpréter comme processus de secondarisation des genres de discours, accompagnant la conceptualisation de l'activité géométrique et de ses objets, le fait d'enrichir la signification du verbe « construire », dans le cadre d'une activité mathématique scolaire comme référant d'abord à une activité matérielle, puis intégrant une dimension conceptuelle pour ne plus référer, à partir d'un certain degré de conceptualisation (correspondant à l'acception experte), qu'à une tâche purement « théorique ». Chesnais (2018a, 2021b) analyse d'une manière similaire l'enrichissement du concept de mesure dans un processus de secondarisation des discours et notamment le développement de nouvelles significations, là encore dans un mouvement enrichissant un rapport d'abord ancré dans une activité matérielle vers un rapport plus en lien avec les dimensions conceptuelles mathématiques de la notion de mesure. Coulange et Train (2020) donnent également l'exemple d'évolutions d'acceptions quotidiennes de mots comme « la moitié » ou « le quart », associées à des usages de dessins figuratifs (comme la représentation par un disque d'une tarte et ses parts) à des significations de ces mêmes mots ancrées dans un discours mathématique (en référence à une unité et à des grandeurs) et associées à des usages de schémas normés devenant des outils pour raisonner et résoudre des problèmes mathématiques.

Ce concept présente l'avantage de permettre de considérer non pas seulement l'écart à la norme (mathématique) des productions langagières dans la classe, mais la manière dont, relativement, celles-ci deviennent « de plus en plus mathématiques » (à penser en termes d'enrichissement, d'épaississement, de plus grande précision, d'apparition de nouveaux objets et de nouvelles fonctions dans le langage, etc.) dans des cycles (Gobert, 2014) : à une étape du processus de conceptualisation, un énoncé premier évolue vers un énoncé second, qui devient à

36 La définition est l'ensemble des propriétés qui caractérisent le symétrique d'un point.

son tour, à une étape ultérieure du processus, lui-même premier dans une nouvelle étape de secondarisation[37]. Il s'agit alors d'identifier comment des pratiques langagières qui sont au départ « non mathématiques » se transforment progressivement en devenant « plus mathématiques ».

En outre, son ancrage vygotskien permet d'articuler la question du fonctionnement du processus de conceptualisation au niveau des sujets à celle de la construction des savoirs, incluant une dimension collective. L'étude de l'évolution des discours en classe peut ainsi porter non seulement sur la construction collective de discours visant des pratiques expertes en lien avec l'émergence de nouveaux objets de savoirs (comme dans Coulange, 2014 ou Chesnais & Constantin, 2020), mais aussi en s'intéressant à la manière dont le processus de secondarisation se nourrit de l'hétéroglossie (Jaubert, Rebière & Bernié, 2012). Les discours s'enrichissent par « couplage hétéroglossique » (Lhoste, Boiron, Jaubert *et al.*, 2011), c'est-à-dire par l'intégration et l'articulation de diverses voix (au sens de Bakhtine) : les voix des élèves pris individuellement et celle de l'enseignant, les différentes voix étant considérées comme correspondant à diverses conceptualisations des savoirs en jeu. Ainsi, Coulange et Train (2020) et Chesnais (2021a) décrivent des phénomènes qualifiés de « couplages hétéroglossiques » (Lhoste, Boiron, Jaubert *et al.*, 2011) liés à l'articulation, voire à la confrontation de plusieurs voix au sein de la classe de mathématiques, permettant dans le premier cas de (re-)construire une nouvelle signification de l'écriture décimale dans une classe de CM2, dans le second d'enrichir la signification de la mesure dans le cadre de l'enseignement de la notion d'angle dans plusieurs classes de sixième.

Le langage comme moyen d'enseignement : place et rôle du langage dans l'activité des enseignants

Les recherches concernant la place et le rôle du langage verbal dans l'activité des enseignants et les logiques d'action qui les pilotent ont conduit à l'identification de tensions et de dilemmes pour les enseignants, en particulier le dilemme de médiation (Adler, 1997) : dilemme entre l'appropriation des pratiques langagières expertes (objets d'apprentissage) et le travail langagier support du processus de conceptualisation (langage comme moyen d'apprentissage). Le constat, fréquent dans les classes, de l'introduction précoce de formulations expertes (notamment l'introduction des termes conventionnels à un stade précoce du processus de conceptualisation) ou l'exigence de leur usage déconnecté d'une activité mathématique « authentique » (par exemple avec des « exercices de vocabulaire ») peut être interprété comme résultant de ce dilemme. Cela s'articule également avec la question plus générale de l'appréciation de la zone proximale de développement des élèves par l'enseignant et en particulier à celle des proximités potentielles (Robert & Vandebrouck, 2014), que l'enseignant organise ou non, anticipe ou non pour construire des liens entre l'activité contextualisée des élèves dans des tâches et les savoirs décontextualisés institutionnalisés dans une « leçon ».

Une autre question de recherche – non indépendante de la précédente – concerne la manière dont les enseignants prennent en charge la fonction du langage comme moyen d'apprentissage et les logiques d'action associées. En particulier, la manière dont les enseignants organisent et étayent la dimension langagière de l'activité des élèves (notamment la prise en charge dans la classe des usages du langage verbal comme métalangage de l'activité mathématique) et son articulation avec d'autres dimensions de l'activité (matérielle notamment ; cf. par exemple ce qui a été dit concernant la construction de figures en géométrie). Cela questionne notamment le rapport entre oral et écrit, ou encore le rôle du langage verbal par rapport au langage formel dans les productions de l'enseignant ou dans ses attendus envers les élèves.

37 « Un énoncé premier vers un énoncé second qui devient premier puis second pour être premier d'un second devenant à son tour premier… » (Gobert, 2014, p. 67).

Les logiques d'action à l'œuvre dans les pratiques des enseignants relatives au rôle et à la place du langage (à la fois comme objet et comme moyen) dans l'apprentissage des mathématiques ne sont par ailleurs probablement pas indépendantes du rapport personnel que les enseignants entretiennent avec les mathématiques et le langage, tout autant que de leurs rapports à l'apprentissage et à l'enseignement. Sur ce point, un des aspects qui semble particulièrement à investiguer est le caractère « naturalisé » et « traditionnellement considéré comme un outil transparent » du langage (Rebière, 2013, p. 222) qui semble faire obstacle à une prise en charge raisonnée et systématique du langage dans l'enseignement. Comme mentionné précédemment, la question des leviers pour le développement d'un enseignement permettant une telle prise en charge se pose également, à la fois du point de vue des savoirs de référence (par exemple la question d'une référence pour des discours méta ou des formulations intermédiaires), des conditions ou des contraintes de l'institution scolaire (et des ressources associées traduisant la position de l'institution) ou encore en termes de pratiques enseignantes et pratiques de formation.

Ces questions trouvent leur prolongement dans celle du développement professionnel des enseignants et notamment des conditions et des leviers pour permettre un enrichissement des pratiques concernant la prise en charge des enjeux liés au langage dans l'apprentissage des mathématiques. Ici encore, cette question s'inscrit dans celle plus large du développement professionnel des enseignants et fait apparaître de façon peut-être encore plus cruciale que pour d'autres aspects le rôle des dispositifs collaboratifs pensés dans une logique d'accompagnement des enseignants, à partir des pratiques existantes (Chesnais & Constantin, 2020 ; Chesnais, 2021a ; Champagne, Coulange, Dicharry *et al.*, à paraître). Sur ce point, nos recherches s'inscrivent dans la même ligne que les recherches portant sur ces mêmes questions à l'international, allant jusqu'à parler de « ressources langagières » pour les enseignants et la formation d'enseignants (Adler, 2000 ; Planas, 2021) même si les différences d'arrière-plan théorique impliquent un rôle moins important dans ces recherches de l'épistémologie des pratiques de référence.

Le langage comme outil méthodologique pour le chercheur

Nous ne nous étendrons pas sur cette thématique, du fait de son statut un peu différent des trois autres, qui nécessiterait de l'inscrire dans une problématisation plus globale des questions méthodologiques en didactique des mathématiques, ce qui dépasse largement le propos de cette note de synthèse. Nous soulevons toutefois une question qui nous semble cruciale et devoir être prise en charge dans les recherches qui s'intéressent spécifiquement au langage.

L'analyse de productions langagières, notamment verbales, orales ou écrites, est utilisée très largement dans les méthodologies de recherche comme moyen d'accès à la « boîte noire » de l'activité, en particulier celle des élèves. Toutefois, cela pose un certain nombre de questions. L'une de ces questions tient à l'interprétation de productions langagières qui peuvent sembler à certains égards conformes à certains usages experts (notamment par l'utilisation d'un vocabulaire spécialisé), mais qui pourraient correspondre davantage à une conformité de surface, dans une forme de « mimétisme des genres seconds de discours » (Champagne & Coulange, 2019), sans pour autant être associées à un degré de conceptualisation très avancé. Ainsi, à l'extrême, certains élèves, en particulier parmi les élèves en difficultés, peuvent interpréter une tâche de production langagière comme demandant avant tout de mobiliser du vocabulaire expert, mais en minimisant l'enjeu du travail sur la signification.

À l'inverse, une deuxième question émerge du fait que, précisément en lien avec la complexité des processus de conceptualisation, des productions langagières dont les formes peuvent être très éloignées des usages experts témoignent parfois, moyennant une interprétation, d'éléments de conceptualisation plus avancés que l'on pourrait le penser au premier abord.

La question des relations entre langage et apprentissage, langage et activité, voire langage et conceptualisation doit donc être prise en charge dans l'arrière-plan des recherches, ainsi que du point de vue méthodologique. Dans les recherches menées avec un ancrage en théorie de l'activité et en se référant à la définition de la conceptualisation dans la lignée de Vergnaud, les éléments essentiels rappelés précédemment incluent notamment de considérer que la dimension langagière est constitutive de la conceptualisation, au sens où les signifiants (en particulier langagiers) étant constitutifs des concepts, leur absence de maîtrise est à interpréter comme une conceptualisation incomplète. Par ailleurs, il y est postulé la cohérence de l'activité de l'élève dans ses différentes dimensions, tout en considérant que les usages de certains signifiants (notamment langagiers) se construisent progressivement, l'utilisation d'un vocabulaire expert pouvant être également vu comme point de départ de la conceptualisation (Vygotski, [1934] 1997). L'interprétation des productions langagières tient ainsi compte de la situation de production ainsi que des différentes dimensions de l'activité en interprétant les productions langagières en lien avec l'analyse du développement d'invariants opératoires, dans un ensemble de situations identifiées.

Conclusion de la troisième partie

L'inscription de la problématisation de ces questions dans un cadre théorique ancré en théorie de l'activité permet d'adopter un point de vue sur les sujets (élèves et enseignants) comme « sujets-personnes » au-delà du sujet épistémique générique traditionnel des cadres de la didactique des mathématiques (Rogalski, 2013). Ce point de vue intègre ainsi l'influence sur le processus d'enseignement-apprentissage de certains facteurs liés aux aspects psychologiques et sociaux, voire sociologiques (Vandebrouck, 2018 ; Chesnais, 2021b), dimensions qui semblent indispensables pour investiguer certaines questions intégrant la complexité des enjeux liés au langage dans le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques dans le contexte scolaire, notamment celle de la construction des inégalités d'apprentissage en lien avec les inégalités sociales.

Elle fournit en outre des moyens de penser la dialectique entre les dimensions collective et individuelle du processus de conceptualisation et de construction des savoirs et le rôle du langage dans ces processus. Rogalski (2008), suivant en cela Johsua (1996), pointe précisément qu'il s'agit là d'un apport de l'approche vygotskienne « très pertinent du point de vue de la didactique des disciplines », qui « s'éloigne clairement de l'approche constructiviste centrée sur l'interaction avec l'objet, dans la théorie piagétienne, qui concerne, il faut le rappeler, le développement structural du sujet épistémique » et que cela « ne se réduit pas à la prise en compte de la médiation sociale dans le développement » (p. 252). De ce point de vue, cet ancrage théorique se distingue également de la position adoptée initialement sur le rôle du langage dans la théorie des situations ou de la théorie anthropologique du didactique, même si les tentatives de développement de ces théories, retracées dans la partie précédente, montrent une évolution de ce point de vue.

Par ailleurs, l'approche proposée partage avec de nombreux autres chercheurs l'idée que l'apprentissage se fait à la fois *dans* et *par* le langage (Gobert, 2013, s'inspirant de Rebière, 2013). Cette idée est au fondement des travaux pionniers interrogeant la pertinence de la notion de secondarisation pour l'étude des phénomènes langagiers dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (notamment Gobert, 2013, 2014). L'utilisation de cette notion à partir de points de vue théoriques variés est à ce titre intéressante et confirme son potentiel pour étudier les phénomènes liés au rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, qu'il s'agisse du rôle du langage dans le processus de conceptualisation des mathématiques par un sujet (psychologiquement et socialement situé), ou du rôle du langage dans la construction collective des savoirs et des discours.

Conclusion et mises en perspective avec des travaux anglo-saxons

Ce travail de relectures et de synthèse montre à notre sens l'intérêt de considérer spécifiquement les questions liées au rôle du langage *verbal* dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques ainsi que différentes pistes de recherche dessinées dans les dernières années par un regain d'intérêt pour ces questions, à partir de divers points de vue. Il révèle également, en relisant certains travaux dont le langage verbal n'était pas un objet de recherche en soi, comment différentes approches théoriques développées en didactique des mathématiques de tradition française se sont emparées de cette question du langage, en appui sur leurs hypothèses ontologiques et épistémologiques.

En cela, nous espérons que cette note de synthèse favorise la discussion, d'une part dans l'optique d'un travail sur le caractère cumulatif des recherches conduites en didactique des mathématiques – en vue de prendre en charge la question du rôle du langage verbal dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques –, d'autre part en vue d'un travail sur la mise en cohérence, du point de vue épistémologique, des développements des cadres théoriques du champ faits dans ce sens, en particulier dans le cas d'imports de concepts issus d'autres champs, comme la mobilisation de la notion de secondarisation dans divers cadres théoriques de didactique des mathématiques. Ces tâches nous apparaissent d'autant plus cruciales, dans un contexte qui interroge les apports de la recherche en didactique à l'évolution du système éducatif, notamment du fait des difficultés rencontrées, l'enseignement des mathématiques en France ces dernières années étant identifié comme très peu efficace et surtout particulièrement inégalitaire (cf. différentes études internationales comme PISA et TIMSS ou des études nationales menées par la DEPP). À ce titre, cet article vise également à initier une démarche d'identification de résultats de recherche qui pourraient alimenter la formation des enseignants ou, du moins, une réflexion sur celle-ci.

Le caractère cumulatif des travaux de recherche concernant le rôle du langage verbal dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques doit aussi être interrogé au regard des travaux menés dans la littérature anglo-saxonne. Ce travail est rendu complexe par le fait que la didactique des mathématiques « à la française » et les travaux anglo-saxons de *mathematics education* ne partagent pas les mêmes fondements épistémologiques, impliquant que la formulation des questions et les modes de recherche sont différents. Concernant les questions liées au langage, ces approches sont aussi particulièrement différenciées par les caractéristiques des contextes culturels (au sens large), et notamment par la langue ! Par exemple, le seul fait que la langue française distingue, en disposant de deux mots, *langue* et *langage*, contrairement à la langue anglaise, qui ne dispose que du mot « *language* », pose un certain nombre de difficultés, y compris dans la diffusion des travaux qui font précisément une distinction entre les deux (cf. *supra*). Toutefois, les chercheurs anglo-saxons, probablement du fait même de ce qui distingue le champ de la *mathematics education* des paradigmes de recherche français (en particulier son ancrage dans la psychologie ou ses rapports avec la sociologie), se sont emparés des questions liées au langage beaucoup plus tôt : comme déjà évoqué dans l'introduction, la première revue de travaux sur le sujet, par Austin et Howson, publiée dans *Educational Studies in Mathematics*, date de 1979 et référence près de 13 pages de bibliographie. Les auteurs y développent déjà la distinction, similaire à celle faite précédemment dans cet article, entre les préoccupations liées d'une part aux usages de la langue dans les mathématiques, d'autre part au rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Par ailleurs, ils proposent une structuration du champ, reprise ensuite, notamment dans les thèmes des groupes de la société européenne de recherche en *Mathematics Education* (ERME) portant sur le langage, en termes de « *language of the learner* », « *language of mathematics* » et « *language of the teacher* ». Ces auteurs mettent également

l'accent sur l'intérêt des apports de la linguistique pour les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. La conférence de Pimm lors du dixième *International Congress on Mathematics Education* (ICME) en 2004 est l'occasion d'une nouvelle revue de travaux, près de 25 ans plus tard, qui évoque surtout l'évolution amenée par l'approche pragmatique en linguistique en termes d'« analyse de discours ». Pimm avait introduit, dans son ouvrage *Speaking mathematically*, en 1987, l'idée de « *Mathematics as language* », qui a évolué plus tard vers le développement de théories s'appuyant sur l'idée renouvelée des mathématiques appréhendées comme un langage, idée qui sous-tend notamment l'approche de Sfard (« *discursive approach* » : « *mathematics as discourse* »/« *as communication* », Sfard, 2000, 2001) et qui a ravivé au plan international le fameux débat sur le fait que les mathématiques puissent ou non être considérées comme un langage. Par ailleurs, Radford et Barwell (2016) ainsi que Planas, Schütte et Morgan (2018) ont réalisé plus récemment deux revues de travaux portant sur des problématiques liées au langage, respectivement parmi les travaux menés au sein de la communauté de *Psychology and Mathematics Education* (PME) et de la *European Society of Research in Mathematics Education* (ERME). Les deux articles concluent à l'enrichissement et la diversification dans les dernières décennies des approches et des questions visant à appréhender les différentes dimensions du rôle du langage dans la classe de mathématiques (cognitif, psychologique, social, politique ou encore affectif). Ils pointent notamment la prise en considération du savoir mathématique comme construction historico-culturelle et ses conséquences dans l'étude du processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques. Ils s'accordent en outre sur le fait que la conceptualisation des rapports entre langage et mathématiques ainsi qu'entre langage et apprentissage dans les différentes théories est déterminante du regard porté sur le processus d'enseignement-apprentissage, tout en concluant à un accord global sur l'importance du rôle du langage dans la construction du savoir mathématique. Il en ressort également l'idée d'une importance croissante accordée à la prise en compte de la dimension sociale et politique du langage dans les recherches, au-delà de sa dimension cognitive. Enfin, une idée essentielle développée et largement diffusée ces dernières années, en particulier en lien avec les recherches sur les questions de multilinguisme est celle de l'importance de considérer la (les) langue(s) et le langage comme une « ressource » (« *language as resource* »[38], Planas, 2018 ; Barwell, 2018) pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Considérer ces travaux du point de vue de la didactique des mathématiques francophone n'est pas aisé, du fait de toutes les raisons déjà mentionnées, notamment des différences dans la constitution et l'histoire de ces champs de recherche ainsi que dans leurs fondements épistémologiques. Il reste à interroger leurs complémentarités, leurs éventuelles convergences et divergences, mais peut-être y a-t-il à considérer aussi que certaines recherches sont incommensurables entre elles (Sfard, citée par Chappet-Pariès & Robert, 2014)[39]. Sans entrer dans le détail de la mise en rapport entre travaux anglo-saxons de la *mathematics education* et travaux francophones de la didactique des mathématiques sur les questions langagières – qui mériterait à elle seule un autre article –, nous pointerons simplement pour terminer quelques éléments sur les ancrages théoriques des travaux.

L'approche que nous avons proposée dans la troisième partie de cet article trouve ainsi un écho dans le fait que de nombreux travaux de *mathematics education* sur le thème du langage font référence à Vygotski. Toutefois, ils adoptent des positionnements divers.

38 Si les liens avec la question du multilinguisme peuvent laisser penser que « *language* » est ici à entendre au sens de « langue » en français, la lecture des travaux sur le sujet montre que la signification du mot anglais recouvre largement les deux significations françaises de langue et langage.

39 Sfard oppose ainsi les approches « néo-piagétiennes » et les approches « néo-vygotskiennes » en les qualifiant d'« incommensurables » car reposant, selon elle, sur des conceptions différentes des mathématiques, platonicienne d'une part et relativiste d'autre part (Sfard, 2000, p. 297).

L'approche proposée ici se distingue notamment de la « *discursive approach* » (Sfard, 2001), en considérant que les mathématiques ou l'apprentissage ne sont pas des phénomènes essentiellement langagiers, mais seulement que le langage y joue un rôle important, sans minimiser le rôle de l'action et de la confrontation avec des situations. Notre position est ainsi plus proche de celle de Radford (2011), dans le positionnement entre différentes lectures des travaux de Vygotski (Schneuwly, 2008), sans toutefois aller jusqu'à prendre autant en considération la référence marxiste. La référence à Bakhtine est également très présente, mais elle est parfois mise en opposition avec le point de vue vygotskien (Barwell, 2013)[40], contrairement à ce que nous proposons, dans la continuité de l'approche didactique liée aux communautés discursives disciplinaires scolaires et à la notion de secondarisation des genres de discours et, là encore, dans une ligne proche de celle de Radford (Radford, Miranda & Guzmán, 2008). Inversement, un arrière-plan linguistique communément partagé par de nombreux travaux anglo-saxons (voir par exemple Morgan, 2006 ; Schleppegrell, 2010 ou Prediger & Wessel, 2013), lié à l'approche sociolinguistique de Halliday (1978) en termes de registres langagiers (qui sont à distinguer des registres de représentation sémiotiques de Duval), s'avère absent des travaux français, ce qui mériterait d'être interrogé.

Pour terminer, rappelons que, malgré l'intérêt que nous avons pointé de considérer spécifiquement les questions liées au rôle du langage *verbal* dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, il ne faut pas pour autant minimiser l'importance de l'articulation de cette question avec celle plus large du rôle du langage en général (incluant d'autres registres de représentation sémiotiques, cruciaux en mathématiques, comme celui du langage formel, notamment, ou encore du dessin). Par ailleurs, il convient de noter que, dans le processus d'enseignement-apprentissage en classe de mathématiques, la fonction de communication du langage verbal s'inscrit fortement également dans un ensemble plus large incluant la communication paraverbale et non verbale (gestes, mimiques, etc.). Toutefois, nous tenons à insister à nouveau, pour terminer, sur le fait que le langage verbal occupe une place particulière, notamment pour assumer la fonction de « communication », ainsi que dans le processus de conceptualisation par un sujet.

Aurélie Chesnais
Université de Montpellier, LIRDEF
aurelie.chesnais@umontpellier.fr

Lalina Coulange
Université de Bordeaux, LaB-E3D
lalina.coulange@u-bordeaux.fr

40 Barwell oppose ainsi la conception « dialogique » du langage de Bakhtine avec la conception « dialectique » de Vygotski, cette dernière ne permettant pas suffisamment, selon lui, de considérer une forme de symétrie des contributions de l'enseignant et des élèves dans les échanges langagiers en classe.

Bibliographie

ADLER J. (1997). « A participatory-inquiry approach and the mediation of mathematical knowledge in a multilingual classroom ». *Educational Studies in Mathematics*, n° 33, p. 235-258.

ADLER J. (2000). « Conceptualising resources as a theme for teacher education ». *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 3, p. 205-224.

ARTIGUE M., BOSCH M., CHAACHOUA H., CHELLOUGUI F., CHESNAIS A. *et al.* (2019). « The French didactics tradition in mathematics ». In W. Blum, M. Artigue, M. A. Mariotti, R. Sträßer & M. Van den Heuvel-Panhuizen, *European Traditions in Didactics of Mathematics*. Cham (Suisse) : Springer, p. 11-55. En ligne : <hal-02047198>.

AUSTIN J. & HOWSON A. (1979) « Language and mathematical education ». *Educational Studies in Mathematics*, n° 10(3), p. 161-197.

BAKHTINE M. (1984). *Les genres du discours. Esthétique de la création verbale*. Paris : Gallimard.

BARRIER T. (2009). *Une perspective sémantique et dialogique sur l'activité de validation en mathématiques*. Thèse de doctorat, mathématiques, université Claude Bernard-Lyon 1. En ligne : <Tel-00653274>.

BARRIER T., DURAND-GUERRIER V. & MESNIL Z. (2019). « L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématiques ». *Éducation et didactique*, n° 13-1, p. 61-81. En ligne : <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.3793>.

BARRIER T. & MATHÉ A.-C. (2014). « Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques ». *Spirale*, n° 54, p. 3-7.

BARWELL R. (2013). « Formal and informal mathematical discourses: Bakhtin and Vygotsky, dialogue and dialectic ». *Educational Studies in Mathematics*, n° 92, p. 331-345. En ligne : <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9641-z>.

BARWELL R. (2018). « From language as a resource to sources of meaning in multilingual mathematics classrooms ». *Journal of Mathematical Behavior*, n° 50, p. 155-168. En ligne : <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.02.007>.

BAUTIER É. (1995). *Pratiques langagières, pratiques sociales, de la sociolinguistique à la sociologie du langage*. Paris : L'Harmattan.

BAUTIER É. (2007). « Maîtriser la langue, oui mais pourquoi (en) faire ? ». In *Apprendre et enseigner en « milieux difficiles », Sélection d'articles du bulletin XYZep, textes choisis par le centre Alain Savary*. Paris : INRP.

BAUTIER É. & RAYOU P. (2009). *Les inégalités d'apprentissage. Programmes, pratiques et malentendus scolaires*. Paris : PUF.

BAUTIER É. & ROCHEX J.-Y. (1997). « Ces malentendus qui font les différences ». In J.-P. Terrail (dir.), *La scolarisation de la France. Critique de l'état des lieux*. Paris : La Dispute, p. 105-122.

BERNIÉ J.-P. (2002). « L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de "communauté discursive" : un apport à la didactique comparée ? ». *Revue française de pédagogie*, n° 141, p. 77-88.

BERNIÉ J.-P. (2004). « L'écriture et le contexte : quelles situations d'apprentissage ? Vers une recomposition de la discipline "français" ». *Linx*, n° 51, p. 25-39.

BONNÉRY S. (2007). *Comprendre l'échec scolaire. Élèves en difficultés et dispositifs pédagogiques*. Paris : La Dispute.

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999). « La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19, n° 1, p. 77-123.

BOSCH M. & PERRIN-GLORIAN M.-J. (2013). « Le langage dans les situations et les institutions ». In A. Bronner, C. Bulf, C. Castela *et al.* (dir.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée sauvage, p. 267-302.

BRIAND J. (1999). « Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19, n° 1, p. 41-76.

BRONCKART J.-P. (1977). *Théories du langage. Une introduction critique*. Bruxelles : Mardaga.

BRONCKART J.-P. (2007) « L'activité langagière, la langue et le signe, comme organisateurs du développement humain ». *Langage et société*, n° 121-122, p. 57-68.

BRONCKART J.-P. & BOTA C. (2011). *Bakhtine démasqué. Histoire d'un menteur, d'une escroquerie et d'un délire collectif*. Genève : Droz.

BRONNER A., BULF C., CASTELA C., GEORGET J.-P., LARGUIER M., PEDEMONTE B., PRESSIAT A. & RODITI E. (2013). *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée sauvage.

BROSSARD M. (1992). « Un cadre théorique pour aborder l'étude des élèves en situation scolaire ». *Enfance*, vol. 46, n° 4, p. 189-200.

BROSSARD M. (1998). « Approche socio-historique des situations d'apprentissage de l'écrit ». In M. Brossard & J. Fijalkow (dir.), *Apprendre à l'école : perspectives piagétiennes et vygotskiennes*. Bordeaux : Presses universitaires de Bordeaux, p. 37-50.

BROSSARD M. (2004). *Vygotski : lectures et perspectives de recherches en éducation*. Villeneuve d'Ascq : Presses universitaires du Septentrion.

BROUSSEAU G. (1986). « Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 7, n° 2, p. 33-115. En ligne : <https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/> (consulté le 2 juin 2022).

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

BROUSSEAU G. (2004). « Les représentations : étude en théorie des situations didactiques ». *Revue des sciences de l'éducation*, vol. 30, n° 30, p. 241-277. En ligne : <https://doi.org/10.7202/012669ar>.

BROUSSEAU G. & BROUSSEAU N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU G. & BROUSSEAU N. (1991) « Le poids d'un récipient, étude des problèmes de mesurage en CM ». *Grand N*, n° 50, p. 65-87.

BROUSSEAU G. & CENTENO J. (1991). « Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 11, n° 2-3, p. 167-210.

BRUNER J. (1983). *Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire*. Paris : PUF.

BULF C. & MATHÉ A.-C. (2018). « Agir-parler-penser en géométrie. Un point de vue sémiotique sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie à l'école primaire ». *Actes du 44e colloque COPIRELEM*. Paris : ARPEME, p. 29-56.

BULF C., MATHÉ A.-C. & MITHALAL J. (2015). « Langage et construction de connaissances dans une situation de résolution de problèmes en géométrie ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 35, n° 1, p. 7-36.

BULF C., MATHÉ A.-C., MITHALAL J. & WOZNIAK F. (2013). « Le langage en classe de mathématiques : regards croisés en TSD et en TAD ». In A. Bronner, C. Bulf, C. Castela *et al.* (dir.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée sauvage.

BUTLEN D. & PÉZARD M. (2003). « Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 23, n° 1, p. 41-78.

CHAMPAGNE M. & COULANGE L. (2019). « Pratiques langagières et difficulté scolaire : des questions didactiques ou pédagogiques ? ». *Éducation et formation*, n° e-312, p. 65-80.

CHAMPAGNE M., COULANGE L., DICHARRY L., JOUVE A., LAROCHE C., MAGNIANT V. & TRAIN G. (à paraître). « Le rôle des écrits intermédiaires dans l'enseignement et l'apprentissage de plusieurs disciplines au sein de la classe ». In B. Gruson, C. Loisy & R. Monod-Ansaldi (dir.), *Dix ans des LéA*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

CHAPPET-PARIÈS M. & ROBERT A. (2014). « Sur quoi porte le discours du professeur en classe de mathématiques (second degré). Rétrospective non exhaustive de recherches didactiques faisant intervenir le discours de l'enseignant (1989-2012) ». In M. Chappet-Pariès, A. Robert, K. Millon-Fauré & J.-P. Drouhard, *Sur quoi porte le discours du professeur en classe de mathématiques ? Questions méthodologiques et premiers résultats. Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, n° 12, p. 3-51.

CHESNAIS A. (2014). « Différenciation dans le processus d'enseignement-apprentissage en mathématiques en éducation prioritaire et ailleurs ». *Revue française de pédagogie*, n° 188, p. 63-73.

CHESNAIS A. (2018a). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement*. Note de synthèse en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches, sciences de l'éducation, université de Montpellier. En ligne : <tel-02046178>.

CHESNAIS A. (2018b). « La différenciation des pratiques enseignantes en mathématiques entre éducation prioritaire et milieu "ordinaire" : déterminants et marges de manœuvre ». In B. Fouquet-Chauprade & A. Soussi (dir.), *Pratiques pédagogiques et enseignement prioritaire*. Berne : Peter Lang, p. 183-210.

CHESNAIS A. (2020). « L'apport d'un point de vue de didactique des mathématiques sur la question des inégalités scolaires ». *Éducation & Didactique*, n° 14-1, p. 49-79.

CHESNAIS A. (2021a). « Enhancing classroom discourse about measure to foster a conceptual understanding of geometrical practices ». *ZDM Mathematics Education*, n° 53, p. 337-357. En ligne : <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01255-0>.

CHESNAIS A. (2021b). « Comment un ancrage didactique en théorie de l'activité amène à repenser le point de vue de l'élève ». In H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, L. Coulange, G. Cirade, P. Job *et al.* (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure*. En ligne : <http://hdl.handle.net/20.500.12162/5384>.

CHESNAIS A. & AUGER N. (à paraître). « Des enjeux syntaxiques dans les apprentissages mathématiques ». In P. Escudé, C. Hache & C. Mendonça Dias (dir.), *Plurilinguisme et mathématiques*. Limoges : Éd. Lambert-Lucas.

CHESNAIS A. & CONSTANTIN C. (2020). « Developing new discourses to deepen students' conceptual understanding in mathematics ». *Proceedings of the Seventh ERME Topic Conference on Language in the Mathematics Classroom,* p. 73-80. En ligne : <hal-02970540>.

CHESNAIS A. & MATHÉ A-C. (2014). « Activités d'élèves, pratiques d'enseignants, interactions langagières et apprentissages : une étude de cas ». In B. Butlen, I. Bloch, M. Blosch et al. (dir.), *Actes de la XVII^e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (1980). « Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante ». *Recherches*, n° 41, p. 71-99.

CHEVALLARD Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (1992). « Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique ». *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 12, n° 12, p. 73-112.

CHEVALLARD Y. (1994). « Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique, Séminaire de l'Associazione Mathesis, Turin, 3 février 1994 ». In *Actes du Séminaire 1993-1994*, p. 190-200. En ligne : <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125> (consulté le 20 mai 2022).

CHEVALLARD Y. (1997). « M'sieur ça existe un trapèze équilatéral ? À ton avis ?... Remarques sur le travail de la langue en banlieue et ailleurs ». *Skholê*, numéro hors-série, p. 137-141.

CHEVALLARD Y. (1999). « L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique ». *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 19, n° 2, p. 221-266.

CHEVALLARD Y. (2003). « Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques ». In S. Maury & M. Caillot (dir.), *Rapport au savoir et didactiques*. Paris : Fabert, p. 81-104.

CHEVALLARD Y. (2007). *Séminaire PLC2, année universitaire 2006-2007*. En ligne : <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=141> (consulté le 20 mai 2022).

CHEVALLARD Y. & BOSCH M. (2012). « L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre ». In L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier & A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques, hors-série Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée sauvage, p. 9–40.

CHIOCCA M.-C. (1995). *Des discours des enseignants de mathématiques en classe aux représentations de leurs élèves sur les mathématiques : un essai de réflexion didactique*. Thèse de doctorat, didactique des mathématiques, université Paris 7.

CONSTANTIN C. (2019). « Substitutions et transformations de mouvement : vers de nouvelles perspectives pour l'enseignement du calcul algébrique ». In M. Maurel, *Jean-Philippe Drouhard. De la linguistique à l'épistémographie. Didactique des mathématiques*, p. 49-64.

COULANGE L. (2014). « Les pratiques langagières au cœur de l'institutionnalisation de savoirs mathématiques ». *Spirale, revue de recherches en éducation*, n° 54, p. 9-28.

COULANGE L. (2015). « Quelle visibilité des connaissances et des savoirs ? L'institutionnalisation au cœur de la construction des inégalités scolaires ». In D. Butlen *et al.* (dir.), *Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif*. Grenoble : La Pensée sauvage, p. 187-210.

COULANGE L., KERVYN B. & PLISSONNEAU G. (2019). « Préparation de l'écriture à la fin du cycle 4. Quelle actualisation dans des disciplines scolaires ». In A. Dias-Chiaruttini & M. Lebrun (dir.), *La question de la relation entre les disciplines scolaires : le cas de l'enseignement du français*. Namur : Presses universitaires de Namur, p. 75-97.

COULANGE L. & ROCHEX J.-Y. (2014). « La construction des inégalités scolaires : approches sociologiques et didactiques ». *Actes du séminaire national 2012*. Paris : IREM de Paris, ARDM, p. 31-53.

COULANGE L. & TRAIN G. (2020). « The school mathematical discursive community: Diversity and the role of language in meaning-making ». *Proceedings of the Seventh ERME Topic Conference on Language in the Mathematics Classroom*, p. 81-88. En ligne : <hal-02970540>.

COULANGE L. & TRAIN G. (soumis). « Communauté discursive mathématicienne scolaire et théorie des situations didactiques ». In L. Coulange, M. Jaubert & Y. Lhoste (dir.), *Les communautés discursives disciplinaires scolaires. Apports aux recherches en didactiques. Hommage à Jean-Paul Bernié*. Rennes : Presses universitaire de Rennes.

COULANGE L. & VANDEBROUCK F. (2021a). « Thème 1. Le point de vue de l'élève. Introduction ». In H. Chaachoua *et al.* (dir.), *Perspectives en didactique des mathématiques : point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures*, vol. 1. Grenoble : La Pensée sauvage, p. 15-17.

COULANGE L. & VANDEBROUCK F. (2021b). « Le point de vue de l'élève en didactique des mathématiques ? ». In H. Chaachoua *et al.* (dir.), *Perspectives en didactique des mathématiques : point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures*, vol. 1. Grenoble : La Pensée sauvage, p. 81-87.

CROSET M.-C. & CHAACHOUA H. (2016). « Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 36, n° 2, p. 161-196. En ligne : <https://revue-rdm.com/2016/une-reponse-a-la-prise-en-compte/> (consulté le 2 juin 2022).

DELOUSTAL-JORRAND V. (2004). *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles*. Thèse de doctorat, didactique des mathématiques, université Joseph Fourier-Grenoble 1.

DURAND-GUERRIER V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de doctorat, didactique des mathématiques, université Claude Bernard-Lyon 1.

DURAND-GUERRIER V. (2013). « Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques ». In A. Bronner, C. Bulf, C. Castela *et al.* (dir.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée sauvage, p. 233-265.

DUVAL R. (1993). « Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée ». *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n° 5, p. 37-65.

DUVAL R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

DUVAL R. (2005). « Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements ». *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, n° 10, p. 5-55.

DUVAL R. (2006). « Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? ». *Relime*, numero especial, p. 45-81.

DUVAL R. (2014). « Ruptures et oublis entre manipuler, voir, dire et écrire. Histoire d'une séquence d'activités ». In C. F. Brandt & M. T. Moretti (dir.), *As Contribuiçoes da Teoria das Representaçoes Sémioticas Para o Ensino e Perquisa na Educaçao Matematica*. Ijuí : Unijui, p. 227-251.

FABERT C. & GRENIER D. (2011). « Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique ». *Petit x*, n° 87, p. 31-52.

FREGONA D., PILAR ORUS P., COULANGE L. & TRAIN G. (à paraître). « Le CRDM Guy Brousseau, un "bon outil" pour ressourcer l'activité du chercheur en didactique ». In A. Chesnais & H. Sabra, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2020-2021*.

GOBERT S. (2013). « Construire des significations dans et par le langage ». In A. Bronner, C. Bulf, C. Castela *et al.* (dir.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée sauvage.

GOBERT S. (2014). « Déplacements dans le processus de secondarisation ». *Spirale, revue de recherches en éducation*, n° 54, p. 65-84.

GOODY J. (1979). *La raison graphique*. Paris : Éd. de Minuit.

GRIZE J.-B. (1990). *Logique et langage*. Paris : Ophrys.

HACHE C. (2001). « L'univers mathématique proposé par le professeur en classe. Observation, description, organisation ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 21, n° 1-2, p. 81-121.

HACHE C. (2015). « Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec "avec" ». *Petit x*, n° 97, p. 27-43.

HACHE C. (2019). *Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques*. Note de synthèse en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches, didactique des mathématiques, université de Paris.

HALLIDAY M. A. K. (1978). *Language as Social Semiotic : The Social Interpretation of Language and Meaning*. Maryland : University Park Press.

JAUBERT M. (2007). *Langage et construction de savoirs à l'école : un exemple en sciences*. Bordeaux : Presses universitaires de Bordeaux.

JAUBERT M., REBIÈRE M. & BERNIÉ J.-P. (2012) « Communautés discursives disciplinaires scolaires et constructions de savoirs : l'hypothèse énonciative ». In *forumlecture.ch, Plate-forme internet sur la littéracie*. En ligne : <http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf> (consulté le 2 juin 2022).

JOHSUA S. (1996). « Le concept de contrat didactique et l'approche vygotskienne ». In C. Raisky & M. Caillot (dir.), *Au-delà des didactiques, le didactique*. Bruxelles : De Boeck, p. 145-159.

JOSSE E. & ROBERT A. (1993). « Introduction de l'homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeur ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 13, p. 119-154.

KOUKI R. (2008). *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique*. Thèse de doctorat, mathématiques, université Claude Bernard-Lyon 1.

LABORDE C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse d'État, didactique des mathématiques, université Joseph Fourier-Grenoble 1.

LABORDE C. & CAPPONI B. (1994) « Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 14, n° 1-2, p. 165-209.

LAPARRA M. & MARGOLINAS C. (2012). « Oralité, littératie et production des inégalités scolaires ». *Le français aujourd'hui*, n° 177, p. 55-64. En ligne : <https://doi.org/10.3917/lfa.177.0055>.

LAPARRA M. & MARGOLINAS C. (2016). *Les premiers apprentissages scolaires à la loupe*. Bruxelles : De Boeck.

LHOSTE Y., BOIRON V., JAUBERT M., ORANGE C. & REBIÈRE M. (2011). « Le récit : un outil pour prendre en compte le temps et l'espace et construire des savoirs en sciences ? ». *Recherches en didactique des sciences et des technologies*, n° 4, p. 57-82.

MARGOLINAS C. & LAPARRA M. (2011). « Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire ». In J.-Y. Rochex & J. Crinon (dir.), *La construction des inégalités scolaires*. Rennes : Presses universitaires de Rennes, p. 19-32.

MATHÉ A.-C. (2012) « Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 32, n° 2, p. 195-228.

MATHÉ A.-C., BARRIER T. & PERRIN-GLORIAN M.-J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités*. Paris : L'Harmattan.

MATHÉ A.-C. & MITHALAL J. (2019). « L'usage des dessins et le rôle du langage en géométrie : quelques enjeux pour l'enseignement ». In S. Coppé *et al.* (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques*, vol. 1. Grenoble : La Pensée sauvage, p. 47-86.

MILLON-FAURÉ K. (2011). *Répercussions des difficultés langagières des élèves dans l'activité mathématique en classe. Le cas des élèves migrants*. Thèse de doctorat, didactique des mathématiques, Aix-Marseille Université.

MORGAN C. (2006). « What does social semiotics have to offer mathematics education research? ». *Educational Studies in Mathematics*, n° 61, p. 219-245. En ligne : <https://doi.org/10.1007/s10649-006-5477-x>.

PARIÈS M. (2004). « Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques, relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 24, n° 3, p. 251-284.

PARZYSZ B. (1988). « Voir et savoir. La représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace ». *Bulletin de l'APMEP*, n° 364, p. 339-350.

PEDEMONTE B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Thèse de doctorat, mathématiques, université Joseph Fourier-Genoble 1 et université de Génova.

PETITFOUR É. (2017). « Outils théoriques d'analyse de l'action instrumentée, au service de l'étude de difficultés d'élèves dyspraxiques en géométrie ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 37, n° 2-3, p. 247-288. En ligne : <https://revue-rdm.com/2017/outils-theoriques-d-analyse-de-l/> (consulté le 2 juin 2022).

PIMM D. (1987). *Speaking Mathematically. Communication in Mathematics Classrooms*. Londres/New York : Routledge & Kegan Paul.

PIMM D. (2004). « Discourse analysis and mathematics education: An anniversary of sorts ». In M. Niss (dir.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematics Education*. Roskilde (Danemark) : ICMI, p. 1-11.

PLANAS N. (2018). « Language as resource : A key notion for understanding the complexity of mathematics learning ». *Educational Studies in Mathematics*, n° 98, p. 215-229. En ligne : <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9810-y>.

PLANAS N. (2021). « How specific can language as resource become for the teaching of algebraic concepts? ». *ZDM mathematics education*, n° 53, p. 277-288..

PLANAS N., SCHÜTTE M. & MORGAN C. (2018). « Mathematics and language. Lessons and directions from two decades of research ». In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (dir.), *Developing Research in Mathematics Education: Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe*. Londres : Routledge, p. 196-210.

PREDIGER S. & WESSEL L. (2013). « Fostering German-language learners' constructions of meanings for fractions. Design and effects of a language- and mathematics-integrated intervention ». *Mathematics Education Research Journal*, n° 25, p. 435-456. En ligne : <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0079-2>.

RADFORD L. (2011). « Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectification ». *Éléments*, n° 1, p. 1-27.

RADFORD L. & BARWELL R. (2016). « Language in mathematics education research ». In A. Gutiérrez, G. Leder & P. Boero (dir.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Rotterdam : Sense, p. 275-313.

RADFORD L., MIRANDA I. & GUZMÁN J. (2008). « Relative motion, graphs and the heteroglossic transformation of meanings: A semiotic analysis ». In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (dir.), *Proceedings of 32nd Joint Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) and the 30th North American Chapter (PME-NA)*, vol. 4. Morelia : Cinvestav-UMSNH, p. 161-168.

REBIÈRE M. (2013). « S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? ». In A. Bronner, C. Bulf, C. Castela *et al.* (dir.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée sauvage.

ROBERT A. (1995). « Analyse des discours non strictement mathématiques accompagnant des cours de mathématiques ». *Educational Studies in Mathematics*, n° 28, p. 73-86.

ROBERT A. (2008a). « Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement ». In F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès, p. 33-44.

ROBERT A. (2008b). « La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe ». In F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès, p. 59-68.

ROBERT A. & ROBINET J. (1996). « Pour une prise en compte du méta en didactique des mathématiques ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 16, n° 2, p. 145-176.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002). « Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double-approche ». *La Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol. 2, n° 4, p. 505-528.

ROBERT A. & TENAUD I. (1988). « Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 9, n° 1, p. 31-70.

ROBERT A. & VANDEBROUCK F. (2014). « Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 34, n° 2-3, p. 239-285.

ROBOTTI E. (2002). *Le rôle médiateur de la verbalisation entre les aspects figuraux et théoriques dans un problème de démonstration en géométrie plane*. Thèse de doctorat, mathématiques, université Joseph Fourier-Grenoble 1.

ROCHEX J.-Y. & CRINON J. (dir.) (2011). *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

ROGALSKI J. (2008). « Mise en regard des théories de Piaget et Vygotsky sur le développement et l'apprentissage ». In F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès, p. 33-44.

ROGALSKI J. (2013). « Théorie de l'activité et cadres développementaux pour l'analyse liée des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves ». In F. Vandebrouck, A. Robert, J. Rogalski, M. Abboud-Blanchard, C. Cazes, A. Chesnais & C. Hache, *Activités des élèves et pratiques des enseignants*

en classe de mathématiques. Cahiers du Laboratoire de didactique André Revuz, n° 5. Paris : IREM-Paris-Diderot.

SADJA KAM J. (2013). *Enseigner les concepts logiques en début d'université dans l'espace mathématique francophone : aspects didactiques épistémologiques et langagiers. Une étude de cas au Cameroun*. Thèse de doctorat, sciences de l'éducation, université Claude Bernard-Lyon 1.

SAUTER M. (1998). « Narrations de recherche : une nouvelle pratique pédagogique ». *Repères IREM*, n° 30, p. 9-21.

SCHLEPPEGRELL M. J. (2010). « Language in mathematics teaching and learning. A research review ». In J. Moschkovitch (dir.), *Language and Mathematics Education*. Charlotte : Information Age Publishing, p. 73-112.

SCHNEUWLY B. (2008). « Éléments d'histoire des 20 années passées et propositions conceptuelles pour la suite ». In M. Brossard & J. Fijalkov (dir.), *Vygotski et les recherches en éducation et en didactiques*. Bordeaux : Presses Universitaires de Bordeaux, p. 21-34.

SENSEVY G. (2007). « Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique ». In G. Sensevy & A. Mercier (dir.), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves dans la classe*. Rennes : Presses universitaires de Rennes, p. 13-49.

SENSEVY G. & MERCIER A. (dir.) (2007). *Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

SENSEVY G. & QUILIO S. (2002). « Les discours du professeur. Vers une pragmatique didactique ». *Revue française de pédagogie*, n° 141, p. 47-56.

SFARD A. (2000). « Steering (Dis)course between metaphors and rigor: Using focal analysis to investigate emergence of mathematical objects ». *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, n° 3, p. 296-327.

SFARD A. (2001). « There is more to discourse than meet the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning ». *Educational Studies in Mathematics*, n° 46, p. 13-57.

VANDEBROUCK F. (dir.) (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès.

VANDEBROUCK F. (2018). « Activity theory in French didactic research ». In G. Kaiser *et al.* (dir.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs*. En ligne : <https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_38>.

VANDEBROUCK F., ROBERT A., ROGALSKI J., ABBOUD-BLANCHARD M., CAZES C., CHESNAIS A. & HACHE C. (2013). « Activités des élèves et pratiques des enseignants en classe de mathématiques ». *Cahiers du Laboratoire de didactique André Revuz*, n° 5. Paris : IREM-Paris-Diderot.

VERGNAUD G. (1990). « La théorie des champs conceptuels ». *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10, n° 2-3, p. 133-170.

VERGNAUD G. (1991). « Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques ». *Revue française de pédagogie*, n° 96, p. 79-86.

VERGNAUD G. (2001). « Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance ». In J. Portugais (dir.), *Actes du colloque GDM-2001*. En ligne : <http://www.recherches.philippeclauzard.com/vergnaud_forme_connaissance.pdf> (consulté le 2 juin 2022).

VYGOTSKI L. ([1934] 1997). *Pensée et langage*. Paris : La Dispute.

WITTGENSTEIN L. (1953). *Philosophical Investigations*. Oxford : Basil Blackwell.